Normalisierung reduzierter komplexer Räume

- Diplomarbeit -

Bearbeiter: K. ALLINGER

Aufgabensteller: Univ. Doz. Dr. S. HAYES

Abgabedatum: 15. Mai 1978

I N H A L T S Ü B E R S I C H T

0. Einleitung

0.1. Ein Leitgedanke

(0) In der vorliegenden Arbeit sind grundlegende funktionentheoretische Aussagen zusammengetragen, die sich auf die Begriffsbildung der schwach holomorphen Struktur eines komplexen Raumes stützen. Ich will hier drei Problemstellungen umreißen, die auf natürliche Weise auf die Betrachtung schwach holomorpher Funktionen und der Normalisierung führen und zugleich eindrucksvoll klarmachen, wie fundamental diese Begriffe sind:

(1) *Hebbarkeitssätze*

sind eine typische Besonderheit für die Theorie der Funktionen komplexer Veränderlicher. Obwohl sich der RIEMANN'sche Hebbarkeitssatz in $\mathbb{C}$ recht einfach beweisen läßt, ist er bedeutend. Es verwundert nicht, daß man im $\mathbb{C}^n$ für $n \geq 3$ zwei Varianten dieses Satzes kennt: Auch genügend niederdimensionale analytische Mengen treten im $\mathbb{C}^n$ gelegentlich an die Stelle der Punkte in $\mathbb{C}$.

Es entsteht die Frage, wie sich die Hebbarkeitssätze auf komplexe Räume übertragen lassen. Wir beschäftigen uns nur mit reduzierten komplexen Räumen; für GRAUERT'sche komplexe Räume warten die Probleme derzeit noch auf ihre Lösung. Betrachtet man das Achsenkreuz im $\mathbb{C}^2$, oder im $\mathbb{C}^3$ eine Koordinatenebene zusammen mit der übrigen Koordinatenachse (vgl. 1.4. bzw. 8.3.2), so erkennt man schnell, daß sich die beiden RIEMANN'schen Hebbarkeitssätze nicht unmittelbar auf (reduzierte) komplexe Räume anwenden lassen. Natürlich tanzen höchstens singuläre Punkte aus der Reihe. K. OKA hat zur Verteilung der Ausnahmepunkte gezeigt, daß die Menge der "bösen" Punkte abgeschlossen, sogar analytisch ist (vgl. 6.3.). Die schöne Vermutung, daß die Menge der Ausnahmepunkte gleich der Singularitätenmenge sein könnte, stimmt jedoch nicht; auch das hat K. OKA als erster nachgewiesen (vgl.4.7.).

Die Untersuchungen, wie man die Argumentation im $\mathbb{C}^n$ aufspalten und verfeinern muß, um Fortsetzungssätze für holomorphe Funktionen in komplexen Räumen zu gewinnen, sind fruchtbar. Man zeichnet zunächst diejenigen Funktionen, die den Voraussetzungen des 1. RIEMANN'schen Hebbarkeitssatzes genügen, als schwach holomorphe Funktionen aus. Wie so oft in der Funktionentheorie kommt man zu einer anschaulichen Vorstellung, wenn man die Graphen von Funktionen betrachtet. Man gelangt so ausgehend von den schwach holomorphen Funktionen zu den Begriffen der eigentlichen Modifikation und der Normalisierung, einer "universellen" eigentlichen Modifikation.

Schon aus dem Beweis des RIEMANN'schen Hebbarkeitssatzes in $\mathbb{C}$ lassen sich wertvolle Hinweise ableiten, wie man in komplexen Räumen vorzugehen hat. Wir beschreiben kurz den Beweisaufbau:

Sei D offen in $\mathbb{C}$, $a \in D$ und

$f : D\setminus\{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph und

in einer Umgebung von a beschränkt.

1) Multipliziert man f mit dem
"universellen Nenner" $(z-a)^2$
vor, dann lassen sich sowohl $(z-a)^2 f$ als auch die Ableitung stetig in a fortsetzen. Sei g die Fortsetzung von $(z-a)^2 f$.

2) Nun ist die Gleichung
$(z-a)^2\ F(z) = g(z)$
im Bereich der holomorphen Funktionen nach F auflösbar. Das kann man auch als "Kohärenz" interpretieren.

Die beiden beschriebenen Schritte lassen sich sinngemäß auf komplexe Räume verallgemeinern. Allerdings braucht man dazu kräftige Werkzeuge, wie z.B. den lokalen Parametrisierungssatz von REMMERT und STEIN.

Es sei gleich noch bemerkt, daß mit der Verallgemeinerung des 1. RIEMANN'schen Hebbarkeitssatzes bereits tiefliegende Einsichten in die Struktur der komplexen Räume gewonnen sind. Der 2. RIEMANN'sche Hebbarkeitssatz stellt dann kein weiteres Problem mehr dar. Die Verallgemeinerung einer schwächeren Form des 1. RIEMANN'schen Hebbarkeitssatzes läßt sich auf die erhaltenen Erkenntnisse aufbauen.

Natürlich kann man den Hebbarkeitssätzen auf komplexen Räumen noch eine andere Form geben: Man kann nach der Fortsetzbarkeit von analytischen Mengen fragen. Diese Problemstellung führt auf weitere tiefliegende Aussagen wie einen Fortsetzungssatz von THULLEN-REMMERT-STEIN. Damit werden wir uns jedoch *nicht* beschäftigen.

(2) Schon die Definition eines *Holomorphiebegriffes*
stößt bei komplexen Räumen auf Schwierigkeiten. Die Charakterisierungen des Holomorphiebegriffes auf komplexen Mannigfaltigkeiten liefern auf komplexen Räumen verschiedene Holomorphiebegriffe. Nun ist es nicht ungewöhnlich, daß ein Begriff bei Ausdehnung auf allgemeinere Grundstrukturen in mehrere aufgespalten wird: Diffizilere Argumentation führt eben zu genaueren Einsichten.

Jedoch ist es in der Funktionentheorie so, daß man von einem brauchbaren Holomorphiebegriff die Kohärenz fordern wird: Wenn es schon ein Ausgangspunkt der Funktionentheorie war, Gleichungssysteme mit holomorphen Koeffizienten durch holomorphe Funktionen aufzulösen, so wird man von einer holomorphen Struktur auf komplexen Räumen wenigstens verlangen, daß sich lineare Gleichungen mit holomorphen Koeffizienten lokal auflösen *lassen*.

Ein greifbarer Holomorphiebegriff wäre wohl die stetig schwache Holomorphie: Komplexe Räume sind spezielle topologische Räume, also liegt es nahe zu verlangen, daß sich holomorphe Funktionen wenigstens topologisch "anständig" benehmen, d.h. stetig sind. Im übrigen ist die Menge der gewöhnlichen Punkte eine (sogar die größte in einem komplexen Raum enthaltene) Mannigfaltigkeit und für Mannigfaltigkeiten wissen wir bereits, was Holomorphie bedeuten soll. Das Problem, für die Garbe der stetig schwach holomorphen Funktionskeime die Kohärenz nachzuweisen, ist aber außerordentlich verwickelt. Man hat die Aufgabe aufzuteilen, indem man von leichter handzuhabenden Definitionen zu obiger Definition hinaufsteigt. Sehen wir uns an, wie man einer Lösung näherkommt:

Die Menge der stetig schwach holomorphen Funktionen auf einem komplexen Raum ist genaugenommen durch eine Fortsetzungseigenschaft definiert: Welche auf der komplexen Mannigfaltigkeit der gewöhnlichen Punkte holomorphen Funktionen lassen sich stetig in die Singularitäten fortsetzen? Hier leistet die Erinnerung an RIEMANN'sche Hebbarkeitssätze im $\mathbb{C}^n$ einen guten Ansatzpunkt, wenngleich dadurch die Situation noch nicht entschärft wird. Man wird wieder auf die Gedanken von (1) geführt. Überhaupt ist die stetig schwache Holomorphie auf lokal irreduziblen komplexen Räumen dasselbe wie die schwache Holomorphie. Mit der in (1) angedeuteten Verallgemeinerung des 1. RIEMANN'schen Hebbarkeitssatzes - der Normalisierung - und der darauf aufbauenden Verallgemeinerung des schwachen RIEMANN'schen Hebbarkeitssatzes - der Maximalisierung - sind nun tatsächlich die Probleme im wesentlichen gelöst. Insofern ist die Normalisierung mit dem Aufbau einer Funktionentheorie auf komplexen Räumen verknüpft.

Es sei hier noch eine Bemerkung zum Kohärenzbegriff erlaubt: Man interessiert sich in erster Linie dafür, ob eine Struktur relationenendlich ist. Die Frage der Relationenendlichkeit läßt sich nun zurückspielen auf die einfachste (übliche) holomorphe Struktur, wenn man weiß, daß die vorgegebene Struktur bzgl. dieser einfachsten endlich erzeugt ist. Relationenendlichkeit und endliche Erzeugtheit sind bzgl. Restklassenbildung in gewisser Weise invers zueinander. Meist ist der Nachweis der einen (dann gewöhnlich unwichtigen) der beiden Eigenschaften trivial. Es ist ein raffinierter Schachzug, beide Eigenschaften im Begriff der Kohärenz zusammenzufassen. Mit Hilfe der endlichen Erzeugtheit wird die Relationenendlichkeit von der einfachsten Struktur auf kompliziertere weitergeschoben. Das kommt auch in vorliegender Arbeit zum Tragen.

(3) Bei der Durchrechnung konkreter *Beispiele* analytischer Mengen erweisen sich explizite Parametrisierungen oft als recht hilfreich. Jedoch gelingt es nicht immer, genügend vorteilhafte, vollständige Parametrisierungen (etwa im Sinne von Uniformisierungen) zu finden. Es reichen aber manchmal auch Teilparametrisierungen aus. Wir betrachten in dieser Arbeit speziell die NEIL'sche Parabel (vgl. 8.2.4.) und ein höherdimensionales Analogon (vgl. 8.3.6). Jedesmal erweist sich ein vernünftiger Parametrisierungsversuch als die Normalisierung. Es sei jedoch angemerkt, daß man mit den angegebenen Teilparametrisierungen beinahe genausogut arbeiten kann, wenn man gar nicht weiß, daß es sich um Normalisierungen handelt. Die Charakterisierung als Normalisierungen stellt im Grunde nur eine *verallge-*

meinerungsfähige Interpretation dar. Eben diese Verallgemeinerung ist freilich für die Theorie fruchtbar.

0.2. Einige technische Vorbemerkungen zur Arbeit

(1) Es sei zunächst an Hand einer groben G l i e d e r u n g ein erster Überblick über den Aufbau der Arbeit gegeben:

1. Schwach holomorphe Funktionen
   (Ausgangspunkt der in dieser Arbeit angestellten Überlegungen)
2. Normalisierung analytischer Mengen in einem Punkt
5. Der KUHLMANN'sche Beweis der Offenheit der Menge der normalen Punkte. Dazu gehören zwei vorbereitende Abschnitte:
   3. Nennergarben
   4. Ein Dimensionssatz
      (In diesem Abschnitt wird auch ein Normalitätskriterium von OKA für analytische Hyperflächen bewiesen)
6. Der GRAUERT-REMMERT'sche Beweis der Offenheit der Menge der normalen Punkte
7. Der Normalisierungssatz von OKA
8. Einige Beispiele zur Normalisierung
   (Verschiedenartige Anwendungen des Normalisierungssatzes)
9. Anhang - Algebraische Methoden -
   (Zusammenstellung und Beweis verwendeter Sätze aus der kommutativen Algebra)

Im Inhaltsverzeichnis auf den ersten Seiten werden sogar zu jedem Punkt Kurzüberschriften angegeben. Auf diese Weise vermittelt das Inhaltsverzeichnis nicht nur einen weitergehenden Überblick über den Aufbau der Arbeit sondern auch gleich einen Einblick in die Aussagen, die in den einzelnen Punkten gemacht werden.

In 0.4. werde ich zu obiger Gliederung noch einige verbindende Worte sagen.

(2) Über die stillschweigend verwendeten Voraussetzungen.
Mehrdimensionale Funktionentheorie wird etwa in dem Umfang der Vorlesungsausarbeitungen [KA] und [KR] vorausgesetzt. Insbesondere wird der lokale Parametrisierungssatz und einige daraus folgende Eigenschaften für (reduzierte) analytische Mengen, z.B. der Dimensionsbegriff, viel verwendet. Auch einige weitergehende Eigenschaften analytischer Mengen werden aus [WH] oder [GU] zitiert.

Wir sprechen gundsätzlich nur über *reduzierte* komplexe Strukturen. Den Begriff des komplexen Raumes definieren wir nach SERRE:

Ein komplexer Raum ist ein HAUSDORFF-Raum
zusammen mit einem vollständigen komplexen Atlas,
so daß der Raum lokal mit (reduzierten) analytischen Mengen identifiziert werden kann.

In den ersten sechs Abschnitten wird durchwegs lokale Theorie betrieben und dafür hätte auch der Begriff der analytischen Menge ausgereicht. Ich habe auch einige lokale Aussagen nur für analytische Mengen formuliert. Die lokale Theorie analytischer Mengen und komplexer Räume ist ja dasselbe. Insbesondere in Abschnitt 2 habe ich die Formulierung für analytische Mengen vorgezogen und damit das Vorbild in [GU] nicht verändert. Gerade im 2. Abschnitt sind nämlich Sätze zusammengestellt, die man besser "punktual" als lokal nennt.

Wenn dann ab dem siebten Abschnitt wirklich globale Theorie betrieben wird, dann müssen wir unsere komplexen Räume - wie heute fast allgemein üblich - noch etwas enger definieren:

In 7.6,(1) wird abgemacht, daß ab dieser Stelle nur noch komplexe Räume betrachtet werden,
die sich durch *abzählbar* viele Karten überdecken lassen.

Ich hoffe, daß diese kleine Uneinheitlichkeit keine Verwirrung stiftet.

Nachdem wir die schwach holomorphen Funktionen im ersten Abschnitt ausführlich beschrieben haben und gewisse Modifikationen als ihre Graphen erkannt haben, schiene es konsequent, auch die Modifikationen ihrerseits genau zu beschreiben. Das aber würde zu weit führen. Wir haben einige Sätze über Modifikationen als bekannt vorausgesetzt. Man informiert sich dazu am besten in [WH].

Wir haben den Begriff der Modifikation nicht ganz im Sinne der Literatur verwendet. Um umständliche Wortbildungen zu vermeiden, erschien es vorteilhaft, in den ersten sieben Abschnitten die "eigentlichen Modifikationen mit endlichen Fasern" (eben die Graphen der schwach holomorphen Funktionen) nur als Modifikationen zu bezeichnen (vgl. 2.1.). Erst ab 8.5. (also in den Anwendungsbeispielen) werden noch allgemeinere Modifikationen betrachtet; dann schreiben wir immer genau hin, was gemeint ist.

Die teils recht massiven Hilfsmittel aus der Algebra habe ich in einem Anhang eigens entwickelt.

Garbentheoretische Hilfsmittel (insbesondere das Kohärenzkriterium von SERRE mit seinen Folgerungen) werden als selbstverständlich vorausgesetzt. Cohomologietheorie wird nicht benutzt. Ich habe während meiner Arbeit zwar Herleitungen und durchsichtige Beweise zu den eingesetzten garbentheoretischen Dingen angefertigt, jedoch sind die Aussagen dem funktionentheoretisch interessierten Leser sicher zu wohlbekannt, als daß er sie nochmals ausgeführt sehen wollte.

Schließlich darf ich noch sagen, daß ein paar Dinge, die verwendet werden, erst an späterer Stelle, die mir geeigneter erschien, explizit zitiert werden.

(3) Damit man nicht etwa vergeblich nachdenkt, sei hier noch die Symbolik erläutert.

Im Text definierte Bezeichnungen:

X^-	Menge der gewöhnlichen Punkte des komplexen Raumes X	1. 2.
X^x	Singularitätenmenge von X	1. 2.
${}_X\mathcal{O}'$	Garbe der schwach holomorphen Funktionskeime auf X	1.11.
$\mathcal{O}:G$	Nennergarbe von $\mathcal{O}$ nach G	3. 2.
$\mathcal{N}^{(m)}$	Garbe des Verschwindens in m-ter Ordnung auf der analytischen Menge N	5. 8.
supp	Träger	6. 1.
${}_X\hat{\mathcal{O}}$	Garbe der stetig schwach holomorphen Funktionskeime auf X	8. 3.4.
$\hat{K}$	holomorph konvexe Hülle von K	8. 4.1.
R_M bzw. $\frac{R}{M}$	Quotientenring	9. 1.1.
$\mathfrak{a}^e$	Erweiterungsideal von $\mathfrak{a}$	9. 1.1,(4)
$\mathfrak{a}^c$	Verengungsideal von $\mathfrak{a}$	9. 1.1,(4)
$R_\mathfrak{p}$	Lokalisierung des Ringes R mit dem Ideal $\mathfrak{p}$	9. 2.4.
$R:\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{a}^{-1}$	gebrochene Ideale	9. 3.4.
$\mathfrak{p}^{(n)}$	n-te symbolische Potenz des Primideals $\mathfrak{p}$	9. 5.3.
$\mathrm{codim}_R\,\mathfrak{a}$	Kodimension des Ideals $\mathfrak{a} \subseteq R$	9. 8.1.

Weiterhin werden folgende Symbole verwendet:

Bei Widerspruchsbeweisen bedeutet

A:	die Markierung der Widerspruchsannahme und
$\mathbb{X}$	den Abschluß des Widerspruchsbeweises.

Weiter schreiben wir

$\dot{\cup}$	für die disjunkte Vereinigung (kommt nur in 2.6. vor)
pr	für kanonische Projektion
Id	für identische Abbildung
$\bar{U}$ oder $\bar{U}^X$	für den Abschluß der Menge U im topologischen Raum X
$\overset{\circ}{U}$	für den offenen Kern von U
$U(x) \underline{\subset} X$	oft für: "U sei (offene) Umgebung für x in X"

Aus der Garbentheorie verwenden wir die Bezeichnungen

$G(U)$ oder $\Gamma(U,G)$	Menge der Schnitte über U in der Garbe G
G_x	Halm der Garbe G im Punkt x
$\rho_*(G_1)$	Bildgarbe der Garbe G_1 auf X_1 unter der Abbildung $\rho : X_1 \to X$
$\mathcal{H}om_R(G_1, G_2)$	Garbe der Keime von R-Modul-Homomorphismen von der Garbe G_1 in die Garbe G_2
$\oplus$	WHITNEY-Summe
$\otimes$	Tensorprodukt

Aus der Funktionentheorie verwenden wir die Bezeichnungen

$(X)_x$ oder X_x	Mengenkeim des komplexen Raumes X in $x \in X$
	[analog für Funktionskeime]
dim bzw. $\dim_x$	Dimension bzw. Dimension im Punkt x
codim	Kodimension
${}_X\mathcal{O}$	Garbe der holomorphen Funktionskeime auf X
${}_n\mathcal{O}$	$= {}_{\mathbb{C}^n}\mathcal{O}$
${}_X\mathcal{M}$	Garbe der meromorphen Funktionskeime auf X
${}_X I_A$ oder I_A	zur analytischen Menge A im komplexen Raum X gehörige Idealgarbe
$I((X)_x)$	Ideal des Mengenkeims $(X)_x$

$Z(\mathfrak{p})$	Nullstellengebilde des Ideals $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_X$
$\mathbb{C}\mathbb{P}$	1-dimensionaler komplex-projektiver Raum

Aus der Algebra verwenden wir die Bezeichnungen

det	Determinante
$\oplus$	direkte Summe
R^x	Einheitengruppe des Ringes R
Quot (R)	totaler Quotientenring des Ringes R
$\mathrm{Hom}_R(M_1, M_2)$	Menge der R-Modul-Homomorphismen von M_1 in M_2 (Man beachte den Unterschied zum Symbol *Hom* !)
$\sqrt{\mathfrak{a}}$	Radikal des Ideals $\mathfrak{a}$
$\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$	Idealquotient
$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$	von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ erzeugtes Ideal

0.3. Zur Darstellungsweise

Ich habe nicht alles bis ins letzte Detail verifiziert oder gar in logische Zeichen aufgelöst, dafür aber *immer* die Beweisideen herausgearbeitet. Weiter war ich auch immer darum bemüht, Worte zum Verständnis des Zusammenhangs einzufügen. An einigen Stellen erschien es mir notwendig, die Beweisidee separat darzustellen und dann noch eine vollständige Verifikation durchzuführen.

0.4. Arbeitsbeschreibung

(1) Als erstes definieren wir den Holomorphiebegriff, der grundlegend für die ganze Arbeit sein wird, und charakterisieren ihn geometrisch und algebraisch. Eine auf einem komplexen Raum erklärte Funktion heißt schwach holomorph, wenn sie in den Punkten, in denen der Raum Mannigfaltigkeitscharakter hat, Liftung einer holomorphen Funktion in einem $\mathbb{C}^n$ ist und im übrigen nicht "davonläuft". Ließe sich in beliebigen komplexen Räumen der 1. RIEMANN'sche Hebbarkeitssatz anwenden, dann wäre dieser Holomorphiebegriff überflüssig. Wir überlegen uns aber an Hand eines einfachen Beispiels, nämlich des Achsenkreuzes im $\mathbb{C}^2$, daß der 1. RIEMANN'sche Hebbarkeitssatz nicht allgemein gilt. Wir bezeichnen die "bösen" Punkte eines komplexen Raumes, d.h. diejenigen Punkte, in welche sich schwach holomorphe Funktionen nicht bedingungslos holomorph fortsetzen lassen, als "nicht normal". Das bedeutendste Resultat des

ersten Abschnitts ist der Satz vom universellen Nenner: schwach holomorphe Funktionen sind spezielle meromorphe Funktionen. Dieser Satz ist bereits ein Vorläufer des Normalisierungssatzes. Aus ihm folgen rasch alle übrigen (meist algebraischen) Aussagen des ersten Abschnitts.

(2) Es ist das Ziel der Arbeit, zu jedem komplexen Raum mit abzählbarer Topologie einen normalen komplexen Raum (implizit) anzugeben, der möglichst viele Eigenschaften des gegebenen komplexen Raumes behält.

Im zweiten Abschnitt betrachten wir nun die Graphen der schwach holomorphen Funktionen. Sie werden als eigentliche Modifikationen mit endlichen Fasern ausgezeichnet. Unsere Konstruktion eigentlicher Modifikationen zu schwach holomorphen Funktionen gibt Anlaß zur Feststellung der "Minimaleigenschaft", daß schwach holomorphe Funktionskeime als erzeugende Elemente der Halme der Bilder von Strukturgarben unter den zugehörigen "Graphen" aufgefaßt werden können. Weiter konstruieren wir sogar zu endlich vielen schwach holomorphen Funktionskeimen einen gemeinsamen Graphen mit derselben Minimaleigenschaft wie oben. Schließlich erhalten wir wegen der im Abschnitt 1 bewiesenen endlichen Erzeugtheit der Halme der Garbe der schwach holomorphen Funktionskeime ein maximales Element unter all diesen Graphen, nämlich die "punktuale" Normalisierung: Die Keime *aller* schwach holomorphen Funktionen in einem Punkt kann man als Halm der Bildgarbe der Holomorphie unter der punktualen Normalisierung auffassen.

Wir haben hier den durchsichtigen, konstruktiven Beweis aus [GU] übernommen, zumal da andere Beweise (wie z.B. der KUHLMANN'sche) nach Ausführung aller Hilfsmittel auch nicht kürzer sind. Der Angabe punktualer Normalisierungen liegt eben eine konstruktive Aufgabenstellung zugrunde.

Die hier behandelte Normalisierung komplexer Räume in den einzelnen Punkten wäre nur ein aufwendiger Formalismus zur Veranschaulichung schwach holomorpher Funktionen, wenn man keine topologische Vorstellung von der Verteilung der Nicht-Normalitäten eines komplexen Raumes hätte. K. OKA zeigte jedoch 1951, daß die Menge der normalen Punkte offen ist. Damit werden obige "punktuale" Normalisierungen sofort zu lokalen Normalisierungen und es besteht die Aussicht, daß man die konstruierten Gebilde -evtl. unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen - zu einer globalen Normalisierung verheften kann. Wir werden uns nicht mit OKA's Offenheitsbeweis befassen, sondern mit einem kurzen, eleganten Beweis von GRAUERT und REMMERT und einem Beweis, welchen man wohl als Vorläufer dieses Beweises ansehen kann: KUHLMANN's Offenheitsbeweis. Während der GRAUERT-REMMERT-Beweis im sechsten Abschnitt geschlossen aufgeschrieben wird, sind zum KUHLMANN'schen Beweis zwei Abschnitte Vorarbeit nötig:

(3) Unter 3. bringen wir rein technisches Rüstzeug zu KUHLMANN's Offenheitsbeweis: Nennergarben werden definiert und ihre Kohärenz untersucht. Die Ausführungen sind mehr analytischer als garbentheoretischer Natur.

(4) Im 4. Abschnitt behandeln wir einen Dimensionssatz, der mehr für sich gesehen interessant ist als für die Normalisierung selbst. Im KUHLMANN'schen Beweis der Offenheit der Menge der normalen Punkte eines komplexen Raumes spielt zwar die eine Richtung dieses Dimensionssatzes eine fundamentale Rolle als Katalysator zwischen Algebra und Geometrie, jedoch ist es GRAUERT und REMMERT gelungen, einen kurzen (aber sehr trickreichen) Beweis des Offenheitssatzes anzugeben, in dem dieser Dimensionssatz nicht mehr auftritt. Den Beweis des Dimensionssatzes führen wir nach KUHLMANN; es ist wohl dieser Beweisansatz, der den bleibenden Wert der Arbeit [KU1] ausmacht. Wir setzen die Dimensionsaussage noch dazu ein, ein Normalitätskriterium von OKA zu beweisen. Dieses Kriterium ermöglicht es, einen singulären Punkt vorzuzeigen, der noch normal ist.

(5) Im 5. Abschnitt kommen wir nun zu KUHLMANN's Offenheitsbeweis. Es war mir besonders daran gelegen, nicht nur die Einzelheiten besonders ausführlich zu verifizieren, sondern auch klarzustellen, an welche Stelle innerhalb des Beweisgerüstes die Dinge gehören. In dieser Form zusammengeschrieben erhält man bald den Eindruck, daß KUHLMANN eigentlich "nur" die Primärkomponenten des von einem universellen Nenner erzeugten Hauptideals aus- und umgerechnet hat. Man wird nun auch verstehen, warum ich KUHLMANN's länglichen Beweis nicht - wie das in [KU1] teilweise geschehen ist - in Lemmata aufgelöst habe; man hätte sich dann mit umständlichen, aus dem Zusammenhang gerissenen und daher künstlich wirkenden Voraussetzungen zu befassen, ohne daß man deshalb verallgemeinerungswürdige Sätze erhielte oder der gesamte Beweis übersichtlicher würde. Übersichtlichkeit habe ich bei KUHLMANN's Beweis durch eine *natürliche* Gliederung erreicht. KUHLMANN selbst ist aufgefallen, daß man die Beweisidee rein algebraisch interpretieren kann und hat diese Interpretation in [KU2] veröffentlicht. Mir schien es richtig, auch diesen Aspekt zu betrachten. Bei dieser Gelegenheit habe ich versucht, das Skelett des gesamten Beweises nochmals deutlich herauszustellen.

(6) Es wäre nun ganz falsch, auch den GRAUERT-REMMERT-Beweis als eine langwierige Rechnung aufzufassen oder ihn dazu aufzubauen. Dieser Beweis zeichnet sich eben dadurch aus, daß die Dinge nur so genau betrachtet werden, wie unbedingt nötig; alles Entbehrliche bleibt hinter einem Schleier verborgen. Der Beweis ist trickreich. Meiner Ansicht nach dürfte jedoch der komplizierte, konstruktive KUHLMANN'sche Beweis einige wesentliche Ideen zu dem GRAUERT-REMMERT-Beweis geliefert haben. Jedenfalls erscheint

mir der GRAUERT-REMMERT-Beweis auf der Grundlage der KUHLMANN'schen Konstruktion besser verständlich; ich habe das auch in 6.2. eigens ausgeführt.

(7) Im 7. Abschnitt wird das Kernstück - der Normalisierungssatz von OKA - formuliert und bewiesen. Die Hauptarbeit ist bereits geleistet und wir können zunächst die Substanz abschöpfen: Lokal läßt sich jeder komplexe Raum normalisieren. Daraus folgt mit einem Satz von GRAUERT über die Kohärenz von Bildgarben bereits die Kohärenz der Garbe schwach holomorpher Funktionskeime. Mithin liefert die Garbe der schwach holomorphen Funktionskeime auf einem komplexen Raum eine vernünftige analytische Struktur.

Durch den lokalen Normalisierungssatz angeleitet definieren wir dann, was wir unter Normalisierung schlechthin verstehen wollen, und überlegen uns sogleich zur Qualitätskontrolle, daß das definierte Objekt bis auf Kartenwechsel eindeutig bestimmt ist. Schließlich sehen wir, daß sich die lokalen Normalisierungen komplexer Räume *mit abzählbarer Topologie* zu einer globalen Normalisierung verkleben lassen.

Es sei hier gleich ein erster Eindruck von OKA's Satz gegeben:

Seien X_1 und X komplexe Räume.

Eine holomorphe Abbildung $\nu : X_1 \to X$ heißt *Normalisierung* von X, falls X_1 ein normaler komplexer Raum ist und

ν eine eigentliche Abbildung mit endlichen Fasern und der Eigenschaft: es gibt eine nirgends dichte, die Singularitätenmenge von X_1 umfassende analytische Ausnahmemenge A_1 in X_1, so daß $\nu | X_1 \setminus A_1 \to X^-$ biholomorph ist,

wobei X^- die Menge der gewöhnlichen Punkte von X bezeichnet.

OKA's Satz besagt nun, daß es

zu jedem komplexen Raum X mit abzählbarer Topologie

eine

und bis auf biholomorphe Äquivalenz *nur* eine

Normalisierung $\nu : X_1 \to X$ gibt.

In diesem Normalisierungssatz sind viele Aussagen in einer einprägsamen, kurzen Form zusammengeschrieben. Je nachdem, welchen Teilaspekt man gerade betrachtet, läßt der Satz viele Interpretationen zu; wir geben gleich einige (ziemlich naive) Beispiele:

Geometrisch-analytische Aussagen über X:

Es gibt eine niederdimensionale ("unsichtbare") analytische Menge A in X, so daß der Restraum $X \setminus A$ normal ist.

Die Menge der normalen Punkte von X ist offen.

Zieht man die nichtnormalen Punkte von X lokal in endlich viele Schichten parallel auseinander, so entsteht ein verzweigter Oberlagerungsraum, der nur normale Punkte enthält.

Algebraisch-analytische Aussage über X :

Die schwache Holomorphie auf X ist das Bild der Holomorphie unter einer verzweigten Überlagerung.

Eine abbildungstheoretische Überlegung:

Zwei Räume, die beide denselben komplexen Raum normalisieren, sind analytisch äquivalent.

(8) Der Normalisierungssatz ist ein kraftvolles Instrument zur Untersuchung komplexer Räume. Im Abschnitt 8 wollen wir an Hand einiger teils einfacher, teils allgemeiner Beispiele vorführen, wie man mit dem nun mühsam bewiesenen Apparat umgeht. Wir wollen sehen, daß die Arbeit wirklich lohnend war.

Die Mischung der Materie in diesem letzten Abschnitt analytischer Theorie sollte darauf hinweisen, wie vielseitig die Einsatzmöglichkeiten des Normalisierungssatzes sind. Die Normalisierung rückt ja - wie wir bereits bemerkt haben - je nachdem, welche Situation gerade vorliegt, immer in ein anderes Licht. Jedoch enthält der achte Abschnitt auch einen "roten Faden", und diesen wollen wir jetzt kurz aufzeigen:

Der Begriff der Normalisierung wurde 1939 von ZARISKI erfunden zum Zweck der Auflösung gewisser Singularitäten algebraischer Varietäten. 1951 wurde dieser Begriff dann von den Funktionentheoretikern übernommen. Wir zeigen nun in 8.1., daß sich auch in der Funktionentheorie mit Hilfe der Normalisierung gewisse Singularitäten auflösen lassen.

Auch in Abschnitt 8.2. ist von der Geometrie komplexer Räume die Rede: Wir beweisen einen Satz (in der Formulierung von REMMERT) über die Charakterisierung lokaler und globaler Irreduzibilität komplexer Räume durch die Normalisierung. An dem recht anschaulichen Resultat kommt zum Ausdruck, wie sich topologische Eigenschaften analytischer Mengen verhalten, wenn man zur Normalisierung hinauf- (oder herunter-) steigt. Im letzten Punkt von 8.2. werden wir noch anschaulicher: Wir behandeln ein konkretes Beispiel - die NEIL'sche Parabel - so elementar und ausführlich wie nur gerade möglich; wir haben hier Gelegenheit, viele der in der Arbeit aufgetretenen Beweisideen im realen Fall zu rekapitulieren.

Während wir in 8.2. das Verhalten einzelner Eigenschaften komplexer Räume unter der Normalisierungsabbildung betrachtet haben, wenden wir uns in den übrigen Abschnitten der Frage zu, wie sich wesentliche Sätze unter der Normalisierungsabbildung verhalten. Die Normalisierung gibt uns ein Mittel in die Hand, manche Sätze, welche für normale komplexe Räume einfacher zu beweisen sind, auf beliebige (reduzierte) komplexe Räume zu verallgemeinern. Um nicht den falschen Eindruck zu erwecken, die Normalisierung wäre nur zum Liften von Sätzen gut, habe ich es jedoch vorgezogen, zunächst in 8.4. unter wesentlicher Benutzung der Normalisierung ein *Gegen*beispiel anzugeben, und zwar einen Satz, der sich nicht bedenkenlos von komplexen Mannigfaltigkeiten auf normale komplexe Räume übertragen läßt, und erst dann (in 8.6.) ein positives Beispiel vorzulegen.

Zum Beweis des "Gegenbeispiels" in 8.4. benötigt man den 2. RIEMANN'schen Hebbarkeitssatz für normale komplexe Räume. Ich habe nun vorweg in einem eigenen Abschnitt (8.3.) nicht nur eine Beweisskizze zu diesem 2. RIEMANN'schen Hebbarkeitssatz angegeben, sondern gleich noch die Bedeutung der Maximalisierung im Gebäude der Fortsetzungssätze erläutert. Man erhält so einen Einblick in die Beziehungen zwischen den verschiedenen Möglichkeiten der Verallgemeinerung des RIEMANN'schen Forsetzungssatzes auf komplexe Räume. Einerseits wird der Begriff der Maximalisierung durch eine Aussage des vorangehenden Abschnitts 8.2. und auch durch das Beispiel der NEIL'schen Parabel in 8.2. nahegelegt, andererseits läßt sich der Maximalisierungssatz mit dem Normalisierungssatz beweisen (wir diskutieren allerdings nur die eine Hälfte der Beweisidee und übergehen die Ausführung des komplizierten Beweises). Den Abschluß von 8.3. bildet der Nachweis, daß die Normalisierung *kein* Funktor ist.

SERRE hat einen Satz über die Erhaltung der Holomorphie-Konvexität bewiesen, wenn man aus einer holomorph-vollständigen komplexen Mannigfaltigkeit eine rein 1-codimensionale analytische Menge herausnimmt. Wir überlegen uns nun in 8.4., daß dieser Satz für beliebige normale komplexe Räume seine Gültigkeit verliert. Das Kriterium, auf welches das (explizite) Gegenbeispiel abgestützt wird, folgt aus dem Normalisierungssatz. Da von holomorpher Vollständigkeit in diesem Abschnitt schon die Rede ist, hielt ich es für angebracht, als letztes in 8.4. noch (ohne Beweis) Bemerkungen über die Vererbung dieses Begriffs auf Normalisierung und Maximalisierung zu machen.

Die Vorarbeit zu dem positiven Beispiel in 8.6. wird in Abschnitt 8.5. geleistet. Indessen sind die Aussagen des Abschnitts 8.5. auch für sich genommen interessant und beim Beweis des Hauptresultats (8.5.3.) wird wieder der (lokale) Normalisierungssatz wesentlich eingesetzt. Der betrachtete Gegenstand sind die stetigen Modifikationen komplexer Räume. Wir bringen in 8.5.3. das von REMMERT bewiesene komplex-analytische Analogon zu einem "Hauptsatz" von ZARISKI in der algebraischen Geometrie: Unter gewissen einfach formulierbaren Voraussetzungen ist eine stetige Modifikation über der Umgebung eines Punktes bereits eine biholomorphe Abbildung. Es sei am Rande bemerkt, daß der Hauptsatz von ZARISKI in der algebraischen Geometrie noch wesentlich tiefer liegt als sein komplex-analytisches Analogon. Aus dem Satz 8.5.3. ziehen wir dann zwei allgemeine Folgerungen über die Ausnahmemengen stetiger Modifikationen und bringen schließlich noch ein mehr konkretes Beispiel aus dem natürlichen Anwendungsbereich dieses Satzes, nämlich der Theorie der meromorphen Abbildungen (die stetigen Modifikationen sind gerade die Graphen meromorpher Abbildungen).

Nun wenden wir uns in 8.6. einem Satz von GRAUERT und REMMERT über die Reinkodimensionalität der Verzweigungsmenge bei eigentlichen stetigen Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten zu. Wir beschäftigen uns jedoch nur mit der Reduktion des Satzes auf normale komplexe Räume mit Hilfe des Normalisierungssatzes und des komplex-analytischen Analogons zum "Hauptsatz von ZARISKI". Damit ist der Normalisierungssatz doppelt benützt worden. Auf den schwierigen Beweis des Satzes von GRAUERT-REMMERT für normale komplexe Räume gehen wir nicht ein, da er mit Normalisierung nichts zu tun hat. Mit den Ausführungen im Abschnitt 8.6. ist die Zugkraft des Normalisierungssatzes sicher überzeugend demonstriert.

(9) Bei den Überlegungen KUHLMANN's in den Artikeln [KU1] und [KU2] werden stark algebraische Hilfsmittel herangezogen. Um das Wechselspiel zwischen Algebra und analytischer Geometrie begreiflich darzustellen, erschien es mir vorteilhaft, die algebraischen Aussagen nicht einfach aus Büchern heraus zu zitieren sondern in einem Abschnitt zusammenzustellen. Ich habe mich bei der Anordnung der Resultate weniger von formallogischen Gesichtspunkten der Algebra leiten lassen, sondern vielmehr von der Reihenfolge, in welcher die Sätze im Hauptteil der Arbeit verwendet werden. Dem Leser sollte die Möglichkeit geboten sein, sich über die algebraischen Methoden der Arbeit auf dem kürzesten Weg vollständig informieren zu können. Daher habe ich auch zu allen Sätzen ausführliche Beweise aufgeschrieben; man erhält so eine Übersicht, wie schwerwiegend bzw. einfach die einzelnen Aussagen sind. Freilich enthalten auch die Bücher [21] von GRAUERT und REMMERT und [2] von ABHYANKAR algebraische Anhänge mit teilweise denselben Sätzen wie in Abschnitt 9; in dieser Arbeit liegt aber doch eine wesentlich andere Situation vor. Obwohl der Anhang mehr zum Nachschlagen gedacht ist, habe ich ihn trotzdem so aufgebaut, daß die Lektüre auch ohne den analytischen Hintergrund lohnend ist.

Als wohlbekannt werden elementare Begriffe, wie z.B. Restklassenstrukturen, vorausgesetzt. Auch einige fundamentale, aber unkomplizierte Aussagen, z.B. ein Satz der Gruppentheorie über Kompositionsreihen und der Zerlegungssatz von LASKER-NOETHER, werden ohne Beweis benutzt.

Um die konsequente Numerierung der Arbeit nicht zu durchbrechen, habe ich den Anhang als 9. Abschnitt bezeichnet (und nicht etwa als Abschnitt A, wie das bei Anhängen oft getan wird). Damit jedoch der Leser bei Zitaten im Haupttext immer richtig geleitet ist, ist die 9 kleiner geschrieben: *9*. Die algebraischen Aussagen, die in den ersten acht Abschnitten wesentlich eingesetzt werden, tragen die Überschrift *Satz;* alle anderen Aussagen sind mit Lemma oder manchmal mit Hilfssatz überschrieben. Ins Inhaltsverzeichnis sind nur die wesentlichen Dinge des Anhangs aufgenommen und diejenigen Punkte, welche im vorderen Teil der Arbeit *nicht un*mittelbar verwendet werden, in Klammern gesetzt.

Die ersten sechs Punkte des Anhangs bringen vor allem "klassische" Idealtheorie, d.h. die Teilbarkeitstheorie in ganz-abgeschlossenen NOETHER'schen Integritätsbereichen.

Die Punkte *9*.1.bis *9*.3.haben mehr vorbereitenden Charakter; es werden technische Hilfsmittel für spätere Sätze zusammengestellt: verallgemeinerte Quotientenringe und ihre Ideale, Erhaltungssätze beim Übergang zu Quotientenringen, DEDEKIND-Ringe. Besonders herausstellen möchte ich aber den Satz *9*.2.5.; dieser Satz ist ein wichtiges Normalitätskriterium.

In *9*.4.wird eine Aussage zum Beweis des Dimensionssatzes in Abschnitt 4 bereitgestellt: Ein DEDEKIND-Ring mit nur endlich vielen Primidealen ist ein Hauptidealring.

In *9*.5. und *9*.6. beschäftigen wir uns mit der Charakterisierung der Primärkomponenten eines von einem universellen Nenner erzeugten Hauptideals durch symbolische Primidealpotenzen und mit der Beschreibung dieser symbolischen Primidealpotenzen durch Potenzen gebrochener Ideale; das sind die algebraischen Grundlagen zu KUHLMANN's Beweis der Offenheit der Menge der normalen Punkte eines komplexen Raumes in Abschnitt 5. Die Beweisanordnung in *9*.6. hat wahrscheinlich kein Vorbild in der Literatur.

Wie KUHLMANN in seinem Aufsatz [KU1] in einer Fußnote bemerkt, kann man auch rein algebraisch zeigen (der einfache analytische Beweis steht in 1.6.), daß der Halm der Strukturgarbe eines reduzierten komplexen Raumes in einem normalen Punkt nullteilerfrei ist; dieser Beweis ist in Punkt *9*.7. durchgeführt.

Die letzten drei Punkte des Anhangs (also *9*.8. - *9*.10.) sind dem wesentlichen algebraischen Teil des Beweises des OKA'schen Normalitätskriteriums für analytische Hyperflächen in Abschnitt 4 gewidmet. Wir beweisen in *9*.9. den tiefliegenden Ungemischtheitssatz von COHEN-MACAULAY für den Spezialfall des Potenzreihenrings in mehreren Veränderlichen über $\mathbb{C}$ und formulieren dieses Resultat in *9*.10. in eine Art Normalitätskriterium um; in *9*.8. wird der Beweis des Ungemischtheitssatzes von COHEN-MACAULAY vorbereitet. Durch die Einschränkung der Überlegungen auf den

Potenzreihenring bekommt dieser letzte Teil des Anhangs auch schon analytische Züge. (Im allgemeinsten Fall wäre der Beweis dieses Satzes von COHEN-MACAULAY noch wesentlich schwieriger.)

Frau Doz. Dr. S. HAYES hat die anspruchsvolle und fesselnde Aufgabenstellung ausgesucht und hat mir mit konkreten Ratschlägen geholfen. Auch in schwierigen Situationen hat Frau Dr. HAYES die Geduld nicht verloren.

Besonders sei auch Herrn Prof. Dr. E. THOMA gedankt für die Förderung der Arbeit und anregende Diskussionen. Ohne diese Unterstützung hätte ich die vorliegende Arbeit nicht anfertigen können.

1. Schwach holomorphe Funktionen

Wir definieren hier einen naheliegenden Holomorphiebegriff auf komplexen Räumen - die schwach holomorphen Funktionen - und charakterisieren ihn durch den üblichen Holomorphiebegriff in einem $\mathbb{C}^n$. Die Beweise sind im wesentlichen eine Anwendung der Einbettungssätze von REMMERT und STEIN (vgl. z.B. [KR] (10.5) S.86).

Zunächst geben wir eine unmittelbare Folgerung aus dem Einbettungssatz an, die wir auch später noch verwenden werden:

• 1.1. Lemma

Vor.: Sei A eine lokal-analytische Menge im $\mathbb{C}^n$,
$x \in A$

Beh.: Es gibt beliebig kleine Umgebungen U von x in A mit der Eigenschaft:
U zerfällt in endlich viele irreduzible Komponenten $A_1, \dots, A_r$, die den Punkt x enthalten und in x irreduzibel sind.

Beweis:

(1) (Vor.): Seien $A_1, \dots, A_r$ lokalanalytisch im $\mathbb{C}^n$, so daß $(A_1)_x, \dots, (A_r)_x$ irreduzibel sind.

(Beh.): Es gibt beliebig kleine Umgebungen U von x in $\mathbb{C}^n$, so daß $A_i \cap U$ irreduzibel sind $\forall\ i = 1, \dots, r$

Bekanntlich ([KA](5.2) S.53) existieren beliebig kleine Umgebungen U von x, so daß die Menge der gewöhnlichen Punkte von $A_i \cap U$ zusammenhängend ist $\forall\ i = 1, \dots, r$.

[Der Beweis des Einbettungssatzes in [KR] (woraus [KA] (5.2) folgt) zeigt, daß man U's unabhängig von i finden kann:
In [KR] (10.5), Beweis zu (3), S.89 werden U's für ein A_i gewählt.
Nach [KR], Bemerkung zu (6.1), kann man dort U's generell für alle i wählen.
(Man beachte noch, daß U von Anfang an so klein zu wählen ist, daß $A_i \cap U$ gleich den im Einbettungssatz vorkommenden analytischen Mengen wird $\forall\ i$)

Das ist bereits (siehe etwa [WH] Chap.3 Sec.1 Theorem 1H S.76) die Behauptung (1).

(2) Nun folgt das Lemma direkt:
Man zerlege $(A)_x = (A'_1)_x \cup \dots \cup (A'_r)_x$ so, daß

a) $A'_1, \dots, A'_r$ lokalanalytisch im $\mathbb{C}^n$ sind,

b) $(A'_1)_x, \dots, (A'_r)_x$ irreduzibel sind und

c) $A'_i \subseteq A\ \forall\ i$.

Dann wähle man U so klein, daß

(1) anwendbar ist,

$A_i := A_i' \cap U$ analytisch in U sind $\forall\, i$ und

$A \cap U = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r$ gilt.

Nun geben wir den anschaulich naheliegenden Holomorphiebegriff an; wir nennen eine Funktion auf $X^- \subseteq X$ (X ein komplexer Raum) schwach holomorph auf X, wenn sie auf X^-, d.h. dort wo X Mannigfaltigkeitscharakter hat, Liftung einer holomorphen Funktion in einem $\mathbb{C}^n$ ist und ansonsten nicht "davonläuft", d.h. der Voraussetzung des 1. RIEMANN'schen Hebbarkeitssatzes genügt:

• 1.2. Definition

Sei X ein (reduzierter) komplexer Raum.
Eine Funktion $f : X^- \to \mathbb{C}$ heißt "schwach holomorph auf X ", wenn gilt:

(SH1) f ist holomorph und

(SH2) $\forall\, x \in X^x\ \exists\, U(x) \subseteq X : f|U \cap X^-$ ist beschränkt.

Abmachung: Dabei bezeichne X^- die Menge der gewöhnlichen Punkte von X ,
$X^x := X \setminus X^-$ die Menge der singulären Punkte von X .
Wir wollen diese recht suggestive Schreibweise (die wir aus [WH] entnommen haben) auch im folgenden beibehalten.

Entsprechend definiert man schwach holomorphe Funktionen auf offenen Teilmengen von X .

• 1.3. Bemerkungen

Sei X wieder ein komplexer Raum.

(1) Die Menge X^- der gewöhnlichen Punkte von X ist definitionsgemäß offen in X. Daher ist der Begriff "holomorph auf X^-" wohldefiniert und somit die Forderung (SH1) sinnvoll.

(2) Bekanntlich sind holomorphe Funktionen auf komplexen Mannigfaltigkeiten (definiert als Liftungen holomorpher Funktionen mittels Karten) dadurch charakterisierbar, daß sie in die $\mathbb{C}^n$, in denen die Mannigfaltigkeiten lokal eingebettet sind, lokal holomorph fortsetzbar sind.
Also bedeutet (SH1) gerade, daß f auf X^- lokal Spur holomorpher Funktionen ist.

(3) Wegen (SH2) genügt es sogar anstatt (SH1) zu fordern:

(SH1)' $\exists\, A$ nirgends dichte analytische Menge in X , so daß f holomorph ist in $X \setminus A$.

Dann sichert nämlich der 1. RIEMANN'sche Hebbarkeitssatz ([KR](9.2) S.74) die Holomorphie von f auf X^-.

$$\left[\begin{array}{l} A \text{ nirgends dicht in } X \\ X^- \text{ offen in } X \end{array}\right\rangle X^-\setminus A \text{ dicht in } X^-$$

Auf der komplexen Mannigfaltigkeit X^- gilt aber der 1. RIEMMANN'sche Hebbarkeitssatz

Man kann jedoch nicht allgemein f auch um Punkte aus X^X als Spur einer holomorphen Funktion ansehen:

• 1.4. Beispiel

Wir wollen zeigen, daß es schwach holomorphe Funktionen gibt, die *nicht* holomorph sind.

(0) Das "Achsenkreuz im $\mathbb{C}^2$" wird definiert durch

$$\begin{aligned} X &:= \overbrace{(\mathbb{C} \times \{0\})}^{X_1:=} \cup \overbrace{(\{0\} \times \mathbb{C})}^{X_2:=} \\ &= \left\{(Z_1,Z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid Z_1 = 0 \text{ oder } Z_2 = 0\right\} \\ &= \left\{(Z_1,Z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid Z_1 \cdot Z_2 = 0\right\} \end{aligned}$$

Das ist eine analytische Menge im $\mathbb{C}^2$, also ein komplexer Raum.

Abmachung: Wir bezeichnen im folgenden Koordinatenfunktionen sowie Koordinaten im $\mathbb{C}^2$ mit Z_1,Z_2 (groß), ihre Einschränkungen auf X mit z_1,z_2 (klein).

Also: $z_1 = Z_1|X$, $z_2 = Z_2|X$.

(1) Man definiert nun leicht eine schwach holomorphe Funktion, die im Schnittpunkt der beiden komplexen Geraden X_1 und X_2 *nicht* holomorph (nicht einmal stetig) fortgesetzt werden kann:

$$f(z_1,z_2) := \begin{cases} 0 \ , & \text{falls } z_2 = 0 \\ 1 \ , & \text{falls } z_1 = 0 \end{cases} \qquad \Big((z_1,z_2) \neq 0\Big)$$

$$= \frac{z_2}{z_1+z_2}$$

Insbesondere ist der Nullpunkt $0 \in X$ ein singulärer Punkt in X.

(2) Wir wollen noch bemerken, daß f in einem gewissen Sinn sogar die einzige schwach holomorphe Funktion auf X ist:

Sei $g : X\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ schwach holomorph auf X .

Dann ist nach dem RIEMANN'schen Hebbarkeitssatz die Einschränkung

$g|X_1\setminus\{0\}$ holomorph in $0 \in X_1$ fortsetzbar.

Diese holomorphe Fortsetzung sei mit $g_1 : X_1 \to \mathbb{C}$ bezeichnet.

g_1 kann man natürlich auch als holomorphe Funktion auf X auffassen:

$$g_1(Z_1,Z_2) := g_1(Z_1,0)\,.$$

Zusammen:

$$g|X_1\setminus\{0\} = g_1|X_1\setminus\{0\} \qquad \text{für ein } g_1 \in {}_X\mathcal{O}(X).$$

Aus Symmetriegründen gilt dasselbe für $g|X_2\setminus\{0\}$:

$$g|X_2\setminus\{0\} = g_2|X_2\setminus\{0\} \qquad \text{für ein } g_2 \in {}_X\mathcal{O}(X)\,.$$

Da nach Konstruktion $f|X_1 = 0$ und $f|X_2 = 1$ ist, kann man nun g schreiben in der Form

$$\begin{aligned} g &= (g_1|X\setminus\{0\})\cdot(1-f) + (g_2|X\setminus\{0\})\cdot f \\ &= (g_2|X\setminus\{0\} - g_1|X\setminus\{0\})\cdot f + g_1|X\setminus\{0\}. \end{aligned}$$

Also ist die Menge der schwach holomorphen Funktionen auf X gerade gegeben durch

$$\left\{g : X^- \to \mathbb{C} \text{ schwach holomorph auf } X\right\} = \left\{ h_1\cdot f + h_2 \,|\, h_1,h_2 \text{ holomorph auf } X\right\}$$

$$\left(\text{genauer:} (h_1|X^-)\cdot f + h_2|X^-\right)$$

Entsprechendes gilt natürlich auch für die schwach holomorphen Funktionen auf offenen 0 - Umgebungen in X .

Es gilt sogar allgemein

• 1.5. Lemma

Vor.: Sei X ein komplexer Raum,
der in einem Punkt $x \in X$ reduzibel ist.

Beh.: Es existiert eine schwach holomorphe Funktion in einer offenen Umgebung von x,
die sich nicht holomorph in x fortsetzen läßt.

Beweis:

Wegen der Reduzibilität von $(X)_x$ gibt es nach 1.1.
eine Umgebung U von x in X , welche sich zerlegen läßt in der Form
$U = X_1 \cup X_2$, wobei X_1 und X_2 analytische Mengen in U sind,
deren Durchschnitt $X_1 \cap X_2$ x enthält und
weder in X_1 noch in X_2 irgendwo dicht ist.

[Man hat nur U gemäß 1.1. zu bestimmen,
für X_1 eine irreduzible Komponente von U zu wählen und
für X_2 die Vereinigung der übrigen irreduziblen Komponenten von U.
Dann liegt $x \in X_1 \cap X_2$ und
es ist (vgl. etwa [WH] Chap. 5 Sec. 3 (N) S.148)
$X_1 \cap X_2$ nirgends dicht in X_i $(i = 1,2)$

Man definiert nun

$$f(z) := \begin{cases} 0\ , & \text{falls } z \in X_1\backslash X_2 \quad (=X_1\backslash(X_1 \cap X_2)) \\ 1\ , & \text{falls } z \in X_2\backslash X_1 \quad (=X_2\backslash(X_1 \cap X_2)) \end{cases}$$

f ist holomorph in $U\backslash(X_1 \cap X_2)$,
also nach 1.3,(3) schwach holomorph in U.

Wegen $x \in X_i = \overline{X_i\backslash(X_1 \cap X_2)}^{X_i}$ für $i = 1$ *und* 2 läßt sich f in x *nicht* stetig fortsetzen.

• 1.6. Definition

Wir interessieren uns besonders für Punkte von X (X ein komplexer Raum), in denen *jede* schwach holomorphe Funktion sogar Spur einer holomorphen Funktion ist; mit anderen Worten Punkte, in denen sich der 1. RIEMANN'sche Hebbarkeitssatz anwenden läßt. Daher definieren wir:

Ein Punkt $x \in X$ heißt "normaler Punkt von X", wenn
sich jede schwach holomorphe Funktion auf einer offenen X - Umgebung von x holomorph in x hinein fortsetzen läßt.

Ein komplexer Raum X heißt ein "normaler komplexer Raum", wenn
jeder Punkt $x \in X$ ein normaler Punkt von X ist.

Bemerkung:

Natürlich ist jeder gewöhnliche Punkt von X ein normaler Punkt von X.
Das Lemma 1.5. liefert eine wichtige Eigenschaft normaler Punkte:

$$x \in X \text{ normal} \underset{1.5.}{\Longrightarrow} (X)_x \text{ irreduzibel} \underset{(\text{triv.})}{\Longrightarrow} {}_X\mathcal{O}_x \text{ Integritätsbereich}$$

(In 9.7.2. bringen wir noch einen *rein algebraischen* Beweis dieser Aussage.)

Die Umkehrungen gelten allerdings *nicht*:

$$x \in X \text{ normal} \underset{\text{i.a.}}{\not\Longrightarrow} x \text{ gewöhnlich} \quad (\text{vgl. } 4.7. \text{ oder } 8.4.4.)$$

$$(X)_x \text{ irreduzibel} \underset{\text{i.a.}}{\not\Longrightarrow} x \text{ normal}$$ (vgl. 8.2.4.(3.1) ; dieses Beispiel ist ganz elementar verständlich.)

Wir streben nun eine Charakterisierung schwach holomorpher Funktionen als spezielle meromorphe Funktionen an. Die Idee sei zunächst an einem Beispiel erläutert:

• 1.7. Beispiel

Sei wie in 1.4.

$X := X_1 \cup X_2 := (\mathbb{C}\times\{0\}) \cup (\{0\}\times\mathbb{C})$ das Achsenkreuz im $\mathbb{C}_2$.

Wir haben in 1.4,(2) bereits bemerkt, daß jede schwach holomorphe Funktion g auf einer offenen 0 - Umgebung U in X die Form hat

$$g = (h_1|U^-)\cdot\frac{z_2}{z_1+z_2} + (h_2|U^-) \qquad \text{mit } h_1,h_2 \in {}_X\mathcal{O}(U).$$

Insbesondere ist jede auf U schwach holomorphe Funktion eine meromorphe Funktion; als Nenner kann man einheitlich z_1+z_2 wählen.
Man kann das auch so ausdrücken:

> Ist $g : U^- \to \mathbb{C}$ schwach holomorph auf U,
> dann läßt sich $(z_1+z_2)\cdot g$ holomorph auf ganz U fortsetzen;
> dabei ist $z_1+z_2 \in {}_X\mathcal{O}(U)$ ein Nichtnullteiler, d.h. man darf in ${}_X\mathcal{M}(U)$ durch z_1+z_2 teilen.

Man sagt, daß z_1+z_2 ein "universeller Nenner" für X in 0 ist.
Um einzusehen, daß z_1+z_2 ein universeller Nenner für X in 0 ist, braucht man indessen nicht erst die Menge der schwach holomorphen Funktionen auf offenen Teilmengen von X so präzis zu beschreiben wie oben; man kann den Beweis folgendermaßen "entschärfen":

$X = X_1 \cup X_2$ ist eine Zerlegung von X in irreduzible Komponenten gemäß 1.1.
Es gilt

$$\left.\begin{array}{ll} z_1|X_1 \neq 0 & , \; z_1|X_2 = 0 \\ z_2|X_1 = 0 & , \; z_2|X_2 \neq 0 \end{array}\right\} \quad (*)$$

Ist nun $g : U^- \to \mathbb{C}$ (U offene 0 - Umgebung in X) schwach holomorph auf U, dann sind $g|U_i^-$ natürlich schwach holomorph auf $U_i := U \cap X_i$ $(i = 1,2)$.
Der RIEMANN'sche Hebbarkeitssatz für $\mathbb{C}$ liefert wieder (d.h. wie in 1.4,(2)), daß die

$g|U_i^-$ holomorph auf ganz U_i fortsetzbar sind $(i = 1,2)$.
Es seien mit $g_i : U_i \to \mathbb{C}$ diese Fortsetzungen bezeichnet.

Man kann die g_i natürlich wieder auffassen als Funktionen von U in $\mathbb{C}$ $(i=1,2)$.
Nun setze man

$$g := z_1\cdot g_1 + z_2\cdot g_2 \quad \text{in } U.$$

Dann gilt wegen $(*)$ für $i = 1,2$:

$$g|U_i^- \underset{(*)}{=} (z_i g_i)|U_i^- \underset{\uparrow \atop \text{Def.}g_i}{=} (z_i\cdot g)|U_i^- \underset{(*)}{=} ((z_1+z_2)\cdot g)|U_i^- .$$

Es ist nun unser erstes Ziel, einen allgemeinen Satz zu beweisen, daß man zu jedem Punkt eines komplexen Raumes einen universellen Nenner finden kann.
An unserem Beispiel haben wir demonstriert, wie wir den "reduziblen Fall" auf den "irreduziblen Fall" zurückführen werden. Dementsprechend werden wir in 1.8. zunächst einen technischen Hilfssatz über die Trennbarkeit irreduzibler Komponenten eines

komplexen Raumes durch holomorphe Funktionen beweisen.
Die Idee zum Beweis des Satzes vom universellen Nenner im "irreduziblen Fall" läßt sich allgemein so formulieren: Man parametrisiert lokal gemäß den Einbettungssätzen von REMMERT-STEIN und betrachtet die Diskriminantenfläche; die Diskriminante wird sich als geeigneter universeller Nenner erweisen. Dieses Vorgehen ist eine direkte Verallgemeinerung des ersten Beweisteils für den RIEMANN'schen Hebbarkeitssatz in $\mathbb{C}$. Ein einfaches konkretes Beispiel dazu findet man noch in 8.2.4.(4.3).

• 1.8. Lemma

Vor.: Seien A und B analytische Mengen in *einer* offenen Menge des $\mathbb{C}^n$.
Keine irreduzible Komponente von B sei ganz in A enthalten.

Beh.: Zu jedem Punkt $x \in A \cap B$
gibt es eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ in einer offenen Umgebung U von x mit den Eigenschaften:

(a) $f|A \cap U = 0$

(b) $f|B_i \neq 0$ für alle irreduziblen Komponenten B_i von $B \cap U$

Bemerkung: Aussage (b) bedeutet gerade, daß $f|B \cap U$ ein Nichtnullteiler ist.
Denn bekanntlich gilt:

B_i irreduzibel $\Longrightarrow {}_{B_i}\mathcal{O}(B_i)$ ist ein Integritätsbereich

(vgl. etwa [WH] Chap.4 Sec.1 Theorem 1D S.104)

Beweis:

(0) Sei $U(x) \subseteq \mathbb{C}^n$ so klein, daß

$$A \cap U = \left\{x' \in U | f_1(x') = \ldots = f_r(x') = 0\right\} \text{mit } f_1, \ldots, f_r \in {}_n\mathcal{O}(U).$$

Wir machen den Ansatz

$$f := \sum_{k=1}^{r} c_k f_k \quad \text{(in } U\text{)} \quad \text{für gewisse } c_k \in \mathbb{C}\ .$$

Dann ist zumindest (a) erfüllt:

$$f|A \cap U = \sum_{k=1}^{r} c_k (f_k|A \cap U) \underset{\text{Def.} f_k}{=\!=\!=} 0\ .$$

Also genügt es zu zeigen,

daß einerseits gilt: $\forall\, B_i\ \exists\, x_i \in B_i$ mit: $\underbrace{f_k(x_i) \neq 0 \text{ für ein } k}_{(\Longleftrightarrow\, x_i \notin A \cap U)}$

d.h. $B_i \setminus A \neq \emptyset \ \forall\, i$

d.h. (1) $B_i \cap A \neq B_i \quad \forall\, i$,und

andererseits: $\exists\, c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{C}$ mit: $\sum_{k=1}^{r} c_k f_k(x_i) \neq 0 \ \forall\, i$

$$\text{d.h. } \mathbb{C}^r \setminus \bigcup_i \Big\{(c_1,\dots,c_r) \,\Big|\, \underbrace{\sum_{k=1}^{r} c_k f_k(x_i)}_{=:\, g_i(c_1,\dots,c_r)} = 0\Big\} \neq \emptyset$$

$$\text{d.h. (2) } \mathbb{C}^r \setminus \bigcup_i g_i^{-1}(0) \neq \emptyset \;.$$

(1) (Beh.): $B_i \cap A \neq B_i$

Es genügt zu zeigen, daß $\dim(B_i \cap A) < \dim B_i$.

B_i hat eine nichtleere offene Menge gewöhnlicher Punkte gemeinsam mit einer irreduziblen Komponente B_j' von B .

[Wir zeigen dazu,

daß $B_i^- \cap (B \cap U)^-$ nichtleer ist und
sowohl in B_i offen
als auch in einer irreduziblen Komponente B_j' von B offen.

Natürlich ist $B_i^- \cap (B \cap U)^-$ offen in B_i.

Wegen $B_i^\times \subseteq (B \cap U)^\times$, also $(B \cap U)^- \subseteq (B \cap U)\setminus B_i^\times$ liegt

$B_i \cap (B \cap U)^- \subseteq B_i^-$

$\Rightarrow B_i^- \cap (B \cap U)^- = B_i \cap (B \cap U)^-$.

B_i ist als irreduzible Komponente von $B \cap U$ der $(B \cap U)$-Abschluß einer Zusammenhangskomponente von $(B \cap U)^-$

(vgl. etwa [WH] Chap.3 Sec.1 Theorem 1G S.74)

Also ist $B_i \cap (B \cap U)^-$ eine Zusammenhangskomponente von $(B \cap U)^- (= B^- \cap U)$, insbesondere nichtleer und offen und zusammenhängend in B^- .

Mithin liegt $B_i \cap (B \cap U)^-$ ganz in einer Zusammenhangskomponente von B^-, also in einer irreduziblen Komponente B_j' von B (wieder nach dem eben zitierten Theorem in [WH]).

Daher ist. ($B_i \subseteq B_j'$ und) $\dim B_i = \dim B_j'$.

Nun folgt die Behauptung (1) sofort aus

$\dim(B_j' \cap A) < \dim B_j' \quad \forall\, j$

(siehe z.B. [WH] Chap.3 Sec.1 Theorem 1J S. 76)

(2) (Beh.): $\mathbb{C}^r \setminus \bigcup_i g_i^{-1}(0) \neq \emptyset$

Da $f_k(x_i) \neq 0$ ist für ein $k \quad \forall\, i$, ist

$g_i^{-1}(0)$ eine Hyperebene in $\mathbb{C}^r$,

also $\dim g_i^{-1}(0) < r \;\forall\, i$.

Dann kann $\mathbb{C}^r \setminus \bigcup_i g_i^{-1}(0)$ nicht leer sein.

• <u>1.9.</u> Satz vom universellen Nenner

Vor.: Sei X ein komplexer Raum und
$x \in X$

Beh.: $\exists$ U offene Umgebung von x in X und $\exists$ $u \in {}_X\mathcal{O}(U)$ mit:

1) u ist Nichtnullteiler in ${}_X\mathcal{O}(U)$.

2) *Ist* U_1 offen in U und $f : U_1^- \to \mathbb{C}$ schwach holomorph auf U_1, *dann* ist $u \cdot f$ in ganz U_1 holomorph fortsetzbar.

(D.h. u ist "universeller Nenner" für X in x.)

Beweis:

(0) Da das Problem lokal ist, kann man o.B.d.A. X als lokalanalytische Menge in einem $\mathbb{C}^n$ auffassen.
Für $X = \mathbb{C}^n$ oder $X = \{0\}$ ist nichts zu zeigen.
(Man kann dann $u = 1$ setzen.
Dann ist der Fall für $X = \{0\}$ klar.
Für $X = \mathbb{C}^n$ wende man den 1. RIEMANN'schen Hebbarkeitssatz an.)
Sei also im folgenden $0 \neq I((X)_x) \neq {}_X\mathcal{O}_x$.

(1) Spezialfall: Sei X irreduzibel in x.

(1.1) Dann ist $I((X)_x)$ ein Primideal (vgl. etwa [KR] (9.5) S. 79), und man kann Koordinaten $x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n$ so wählen, daß $I((X)_x)$ in diesem Koordinatensystem von der Dimension k regulär ist (vgl. [KR] (10,1) S.81).
Dann gibt es nach dem Einbettungssatz von REMMERT-STEIN ([KR](10.5)) für gewisse beliebig kleine Umgebungen U von x, welche sich in der Form

$$U = U' \times U'' \text{ mit } U' \subseteq \mathbb{C}^k\ ,\ U'' \subseteq \mathbb{C}^{n-k} \text{ darstellen lassen,}$$

Polynome $p_{k+1}, q_{k+2},\dots,q_n \in {}_k\mathcal{O}(U')[\vartheta]$, p_{k+1} normiert,
so daß
mit der Diskriminante $\delta \in {}_k\mathcal{O}(U')$ von p_{k+1},

$$N := \left\{(x',x'') \in U = U' \times U'' \,|\, \delta(x') = 0\right\} \quad \text{und}$$

$$N' := \left\{x' \in U' \,|\, \delta(x') = 0\right\}$$

gilt:

$$(X \cap U)\setminus N = \left\{\left(x', x_{k+1}, \frac{q_{k+2}(x',x_{k+1})}{\delta(x')}, \dots, \frac{q_n(x',x_{k+1})}{\delta(x')}\right) \,\middle|\, p_{k+1}(x',x_{k+1}) = 0\ , \delta(x') \neq 0\right\},$$

$(X \cap U)\setminus N$ enthält nur gewöhnliche Punkte von X,

$\overline{(X \cap U)\setminus N} = X \cap U$ und

über jedem Punkt $x' \in U'\setminus N'$ liegen *genau* s Punkte von $(X \cap U)\setminus N$ ($s \in \mathbb{N}$)
(d.h. die Gleichung $p_{k+1}(x',x_{k+1}) = 0$ hat genau s verschiedene Lösungen).

Als erstes stellen wir fest, daß

$(u :=)\delta|X \cap U$ für alle (zulässigen) U ein Nichtnullteiler ist

[Da N nirgends dicht in $X \cap U$ liegt,
enthält N *keine* irreduzible Komponente von $X \cap U$,
d.h. δ verschwindet auf keiner irreduziblen Komponente von $X \cap U$,
d.h. δ ist ein Nichtnullteiler in $X \cap U$ (vgl. etwa [WH] Chap.4 Sec.1 Theorem 1D S. 104).

Seien für $x' \in U'$

$x^1_{k+1},\ldots,x^s_{k+1}$ die Wurzeln des normierten Polynoms $p_{k+1}(x', x_{k+1})$ jede so oft gezählt, wie ihre Vielfachheit besagt.

Man kann die x^l_{k+1} bei jeder Wahl von $x' \in U'\setminus N'$ so numerieren, daß sie in einer Umgebung von x' holomorphe Funktionen sind.

Beweisidee für den Satz vom universellen Nenner in unserem Spezialfall:
Wir wollen zeigen,

daß $u := \delta|X \cap U$ ein universeller Nenner für X in x ist.

Dazu werden wir insbesondere zu einer schwach holomorphen Funktion f auf $X \cap U$ eine holomorphe Funktion

$h \in {}_n\mathcal{O}(U'\times\mathbb{C}^{n-k})$

angeben, so daß

$$h(x',x^l_{k+1},\ldots,x^l_n) = \delta(x')\cdot f(x',x^l_{k+1},\ldots,x^l_n) \quad \forall\, l \quad \forall\, x' \in U',$$

wobei $(x',x^l_{k+1},\ldots,x^l_n) \in (X \cap U)^-$.

Welche Werte h außerhalb $X \cap U$ annimmt, spielt - wenn nur h holomorph ist - keine Rolle.
Wir werden sehen, daß die LAGRANGE-Interpolationsformel für Polynome ein geeignetes Mittel zur Fortsetzung von $\delta\cdot f$ ist:

$$h(x',x_{k+1}) := \sum_{i=1}^{s} \delta(x')\cdot f(x',x^i_{k+1},\ldots,x^i_n)\cdot \prod_{j\neq i} \frac{x_{k+1} - x^j_{k+1}}{x^i_{k+1} - x^j_{k+1}}$$

$$\forall\, x' \in U'\setminus N', x_{k+1} \in \mathbb{C}$$

(Insbesondere ist h sogar unabhängig von $x_{k+2},\ldots,x_n$.)

Die explizite Form der Diskriminante δ liefert nämlich für alle i

$$\frac{\delta(x')}{\prod_{j\neq i}(x^i_{k+1} - x^j_{k+1})} = \pm \prod_{j\neq l\neq i} (x^l_{k+1} - x^j_{k+1}) .$$

(1.2) Sei für alle $i = 1,\dots,s$

$$\delta_i(x') := \frac{\delta(x')}{\prod\limits_{j\neq i}(x^i_{k+1} - x^j_{k+1})} \quad \forall\ x' \in U'\setminus N'$$

$$= \frac{\prod\limits_{l<j}(x^l_{k+1} - x^j_{k+1})^2}{\prod\limits_{j\neq i}(x^i_{k+1} - x^j_{k+1})}$$

$$= (-1)^{\frac{s(s-1)}{2}} \prod_{j\neq l\neq i}(x^l_{k+1} - x^j_{k+1})$$

Mit den x^l_{k+1}, x^j_{k+1} hängen die δ_i natürlich lokal (!) holomorph von x' ab. Die letzte Formel zeigt sogar, daß die δ_i um Punkte aus N' herum lokal holomorph definiert werden können, also:

Die δ_i lassen sich in geeigneten Umgebungen um *beliebige* Punkte aus U' als holomorphe Funktionen definieren.

(Man beachte, daß die δ_i nur bis auf die Numerierung der x^l_{k+1} definiert sind und daher keineswegs im allgemeinen globale holomorphe Funktionen sind!)

(1.3) Sei nun U_1 offen in $X \cap U$ und $f : U_1^- \to \mathbb{C}$ schwach holomorph auf U_1.
Wir wollen zeigen,

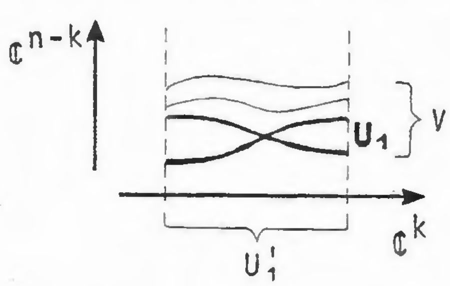
daß sich $\delta \cdot f : U_1^- \to \mathbb{C}$ holomorph in ganz U_1 fortsetzen läßt.

Sei U_1' die Projektion von U_1 auf $\mathbb{C}^k$ und

$V := (X \cap U) \cap (U_1' \times \mathbb{C}^{n-k})$.

Da $U_1^\times$ nirgends dicht liegt in U_1, genügt es aus Stetigkeitsgründen, $\delta \cdot f$ auf kleine zusammenhängende Umgebungen von beliebigen Punkten aus U_1 einzeln holomorph fortzusetzen; wir können daher o.B.d.A. gleich annehmen, daß U_1 eine Zusammenhangskomponente von V ist.

(Es sei erlaubt, die Situation an einer Skizze zu verdeutlichen:



)

Sei U_2 die Vereinigung der übrigen Zusammenhangskomponenten von V (evtl. ist $U_2 = \emptyset$) und f auf U_2 konstant 0 .

Dann ist

$f : V^- \to \mathbb{C}$ schwach holomorph auf V .

Man kann also o.B.d.A. annehmen, daß U_1 die Form hat

$U_1 = (X \cap U) \cap (U_1' \times \mathbb{C}^{n-k})$ mit U_1' offen in $\mathbb{C}^k$.

(1.4) Nun können wir definieren

$$h(x',x_{k+1}) := \sum_{i=1}^{s} \delta(x')\cdot f(x',x_{k+1}^{i},\dots,x_n^{i})\cdot \prod_{j\neq i} \frac{x_{k+1}-x_{k+1}^{j}}{x_{k+1}^{i}-x_{k+1}^{j}}$$

$$\forall\ (x',x_{k+1}) \in (U_1'\setminus N')\times\mathbb{C}\ .$$

Da h von der Numerierung der x_{k+1}^{1} *un*abhängig ist, ist sicher h holomorph auf $(U_1'\setminus N')\times\mathbb{C}$.

Die (triviale) Umschreibung

$$h(x',x_{k+1}) = \sum_{i=1}^{s} \delta_i(x')\cdot f(x',x_{k+1}^{i},\dots,x_n^{i})\cdot \prod_{j\neq i}(x_{k+1}-x_{k+1}^{j})$$

zeigt wegen der schwachen Holomorphie von f und wegen (1.2), daß h um Punkte aus $N'\times\mathbb{C}$ herum lokal beschränkt ist.

Dann ist nach dem 1. RIEMANN'schen Hebbarkeitssatz h holomorph in ganz $U_1'\times\mathbb{C}$ fortsetzbar.

Fassen wir h als holomorphe Funktion auf $U_1 (\subseteq U_1'\times\mathbb{C}^{n-k})$ auf!

Dann ist nach Konstruktion und aus Stetigkeitsgründen $h\,|\,U_1^{-} = \delta\cdot f$.

(2) Allgemeiner Fall

Sei V nach Lemma 1.1. so als offene Umgebung von x gewählt, daß $X\cap V$ in endlich viele irreduzible Komponenten $X_1,\dots,X_r$ zerfällt, die den Punkt x enthalten und in x irreduzibel sind.

o.B.d.A. sei $r \geq 2$ (sonst wende man (1) unmittelbar an)

Für jedes X_i liefert Beweisteil (1) eine Umgebung U_i von x in $\mathbb{C}^n$ und ein $u_i \in {}_n\mathcal{O}(U_i)$, so daß $u_i|X_i \cap U_i$ ein universeller Nenner für X_i in x ist.

Nach Lemma 1.8. gibt es zu jedem i eine Umgebung V_i von x in $\mathbb{C}^n$ und ein $v_i \in {}_n\mathcal{O}(V_i)$ mit

$$v_i|(\bigcup_{j\neq i} X_j)\cap V_i = 0 \quad \text{und}$$

$$v_i|X_i \cap V_i \ \text{ist ein Nichtnullteiler}$$

Sei nun (man beachte wieder Lemma 1.1.)

$U \subseteq \bigcap_i (U_i \cap V_i)$ eine offene Umgebung von x , so daß

$(X\cap U) = (X_1\cap U)\cup\dots\cup(X_r\cap U)$ eine Zerlegung in irreduzible Komponenten ist.

Wir betrachten die u_i und v_i als auf U definierte Funktionen und setzen

$$u := \sum_{i=1}^{r} v_i u_i \in {}_n\mathcal{O}(U)\ .$$

Dann ist $u|(X_i \cap U) = v_i u_i|(X_i \cap U)$ ein Nichtnullteiler $\forall\ i$,
insbesondere $u|X \cap U$ ein Nichtnullteiler.
Sei nun U_1 offen in U und f eine schwach holomorphe Funktion auf $X \cap U_1$.
Wir wollen zeigen,

daß sich $u \cdot f : (X \cap U_1)^{-} \to \mathbb{C}$ holomorph in ganz U_1 fortsetzen läßt.

Aus Stetigkeitsgründen genügt es wieder, $u \cdot f$ auf kleine Umgebungen von beliebigen Punkten aus $X \cap U_1$ einzeln holomorph fortzusetzen; wir betrachten daher U_1 jetzt immer als Umgebung eines festen Punktes aus $X \cap U_1$.
f ist schwach holomorph auf den irreduziblen Komponenten von $X \cap U_1$ und daher ist auch

$f|(X_i \cap U_1)$ schwach holomorph $\forall\ i$

[Anmerkung: Wir werden eine solche Überlegung am Anfang von 2.4. nochmals breiter durchführen.]

Die Konstruktion in (1) war so angelegt, daß man jetzt evtl. nach Verkleinern von U_1

$(u_i|X_i \cap U_1)\cdot(f|X_i \cap U_1)$ holomorph auf ganz $U_1 (\subseteq \mathbb{C}^n!)$ fortsetzen kann;

es sei diese Fortsetzung mit h_i bezeichnet.
Man setze

$$h := \sum_i v_i h_i \in {}_n\mathcal{O}(U_1) .$$

Dann gilt für jedes i

$$h|(X_i \cap U_1)^{-} = (v_i h_i)|(X_i \cap U_1)^{-} = (v_i u_i f)|(X_i \cap U_1)^{-} =$$
$$= (u \cdot f)|(X_i \cap U_1)^{-} ,$$

also ist

h eine holomorphe Fortsetzung von $u \cdot f$ auf U_1.

• 1.10. Bemerkung

Sei wieder X ein komplexer Raum.
Der Satz vom universellen Nenner besagt insbesondere, daß
die schwach holomorphen Funktionen auf offenen Teilmengen von X Spuren meromorpher Funktionen sind.
Um eine geometrische Vorstellung von diesen speziellen meromorphen Funktionen zu gewinnen, werden wir aus der lokalen Beschränktheit schwach holomorpher Funktionen über eine algebraische Zwischenstufe den Funktionsverlauf ermitteln:

Der Satz vom universellen Nenner zusammen mit der lokalen Beschränktheit erlaubt eine algebraische Charakterisierung der schwach holomorphen Funktions*keime*; diese Charakterisierung wird in den letzten vier Punkten dieses Abschnitts vorgetragen.
Diese algebraische Charakterisierung führt zu folgender geometrischen Interpretation:

Zerlegt man X lokal von einem Punkt $x \in X$ gemäß 1.1, etwa

$$U = X_1 \cup \ldots \cup X_r \ , \ U \text{ offene Umgebung von } x \ ,$$

dann ist eine auf U schwach holomorphe Funktion f auf jeder Komponente X_i stetig in x fortsetzbar:

$$f|X_i^- \text{ stetig in } x \text{ fortsetzbar.}$$

Man kann also f auffassen als eine meromorphe Funktion auf X, die in ihren Unbestimmtheitsstellen evtl. mehrdeutig ist.
(Diese geometrische Charakterisierung werden wir in 8.2.1. nachtragen.)

• 1.11. Definition

Sei X ein komplexer Raum.
Für eine offene Teilmenge U in X sei

$${}_X\mathcal{O}'(U) \text{ die Menge der schwach holomorphen Funktionen auf } U \ .$$

Zusammen mit den Beschränkungsmorphismen

$$f|V := f|V^- \quad \forall\ V \text{ offen in } U \quad \forall\ f \in {}_X\mathcal{O}'(U)$$

definieren die Mengen ${}_X\mathcal{O}'(U)$ natürlich ein Garbendatum von ${}_X\mathcal{O}$-Moduln.
Wir bezeichnen daher mit
${}_X\mathcal{O}'$ die "Garbe der schwach holomorphen Funktionskeime auf X "
(Wenn klar ist, von welchem komplexen Raum die Rede ist, schreiben wir natürlich nur $\mathcal{O}'$ statt ${}_X\mathcal{O}'$).

Nun ist auch klar, was man unter einem Keim schwach holomorpher Funktionen in einem Punkt zu verstehen hat; wie üblich werden die Halme von $\mathcal{O}'$ mit $\mathcal{O}'_x (x \in X)$ bezeichnet.

Wir stellen als erstes fest:

• 1.12. Lemma

Vor.: Sei X ein komplexer Raum und
$x \in X$.

Beh.: $\mathcal{O}'_x$ ist ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_x$-Modul und
ein NOETHER'scher Ring.

Beweis:

(1) Wir wählen gemäß 1.9.
einen universellen Nenner u für X in x
und betrachten die Abbildung

$$\Phi : \mathcal{O}'_x \ni \alpha \longmapsto (u)_x \cdot \alpha \in \mathcal{O}_x \ .$$

Das ist eine $\mathcal{O}_x$- lineare Einbettung von $\mathcal{O}'_x$ in $\mathcal{O}_x$:

Es ist unmittelbar klar, daß

Φ wohldefiniert (d.h. $\Phi(\mathcal{O}'_x) \subseteq \mathcal{O}_x$) und

Φ $\mathcal{O}_x$-linear ist.

Da u und somit auch $(u)_x$ ein Nichtnullteiler ist, ist

Φ auch injektiv

[Für $\alpha, \beta \in \mathcal{O}'_x$ gilt ja

$$\Phi(\alpha) = \Phi(\beta) \iff (\alpha - \beta)\cdot(u)_x = 0 \underset{(u)_x \text{ Nichtnullteiler}}{\iff} \alpha = \beta$$

]

Wir können daher $\mathcal{O}'_x$ vermöge Φ mit $(u)_x \cdot \mathcal{O}'_x (\subseteq \mathcal{O}_x)$ identifizieren.

(2) Sei nun I ein Ideal in $\mathcal{O}'_x$.

Dann verifiziert man unmittelbar, daß

$\Phi(I)$ ein Ideal in $\mathcal{O}_x$ ist.

$\mathcal{O}_x \left(= {}_n\mathcal{O}_x \,/\, I((X)_x), n \text{ geeignet}\right)$ ist als homomorphes Bild des NOETHER'schen Ringes ${}_n\mathcal{O}_x$ (vgl. etwa [KR](7.3) S.63) selbst NOETHER'sch.

Also ist $\Phi(I)$ endlich erzeugt über $\mathcal{O}_x$:

$$\Phi(I) = \sum_{i=1}^{r} \Phi(\alpha_i)\mathcal{O}_x \quad \text{für gewisse } \alpha_i \in I$$

$$= \Phi\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathcal{O}_x\right)$$

(wegen der $\mathcal{O}_x$- Linearität von Φ)

$$\underset{\text{da } \Phi \text{ injektiv ist}}{\Rightarrow} I = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathcal{O}_x$$

Das liefert für $I = \mathcal{O}'_x$, daß

$\mathcal{O}'_x$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_x$-Modul ist,

und ansonsten wegen $I = I\cdot\mathcal{O}'_x$, daß

$$I = \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathcal{O}_x\right)\cdot\mathcal{O}'_x = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathcal{O}'_x \text{ endlich erzeugt ist in } \mathcal{O}'_x.$$

Nun erhalten wir leicht die gewünschte algebraische Beschreibung von $\mathcal{O}'_x$:

• 1.13. Satz

- Satz über hebbare Singularitäten -

Vor.: Sei X ein komplexer Raum und

$x \in X$.

Beh.: $\mathcal{O}'_x$ ist der ganze Abschluß von $\mathcal{O}_x$ in $\mathcal{M}_x = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_x)$.

Beweis:

Wir haben zu zeigen,

daß gilt: $\alpha \in \mathcal{O}'_x \iff \alpha \in \mathcal{M}_x$ ist ganz algebraisch über $\mathcal{O}_x$.

"$\Rightarrow$" Nach 1.12. ist $\mathcal{O}'_x$ endlich erzeugt über $\mathcal{O}_x$.

Sei etwa $\mathcal{O}'_x = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{O}_x \varphi_i$.

Man setze noch $\varphi_0 := 1$.

Wegen $\alpha \in \mathcal{O}'_x$ ist $\alpha\varphi_i \in \mathcal{O}'_x = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{O}_x \varphi_i \ \forall\ i = 0,\dots,n$; sei etwa

$\alpha\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\varphi_j$ für gewisse $\alpha_{ij} \in \mathcal{O}_x$,

$$\text{d.h.}\qquad \alpha\cdot\begin{pmatrix}\varphi_0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \varphi_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{01} & \dots & \alpha_{0n}\\ \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot\\ 0 & \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \varphi_n\end{pmatrix}$$

Sei noch $\alpha_{i0} := 0 \ \forall\ i = 0,\dots,n$.

$\Rightarrow \ (\alpha_{ij} - \delta_{ij}\alpha)_{i,j} \cdot (\varphi_j)_j = (0)$

$\Rightarrow \ \det((\alpha_{ij} - \delta_{ij}\alpha)_{i,j}) \cdot \varphi_k = 0 \quad \forall\ k$

$\underset{\varphi_0 = 1}{\Rightarrow} \ \det((\alpha_{ij} - \delta_{ij}\alpha)_{i,j}) = 0$

Entwickeln der Determinante zeigt, daß sie ein *normiertes* Polynom in α ist.

$\Rightarrow \ \alpha \in \mathcal{M}_x$ ist ganz algebraisch über $\mathcal{O}_x$.

"$\Leftarrow$" Sei nun $\alpha \in \mathcal{M}_x$ ganz algebraisch über $\mathcal{O}_x$, also

$\alpha = \dfrac{(f)_x}{(g)_x}$ mit $(f)_x, (g)_x \in \mathcal{O}_x$, $(g)_x$ Nichtnullteiler in $\mathcal{O}_x$, und

$\alpha^n + (h_1)_x\alpha^{n-1} + \dots + (h_n)_x = 0$ (*) für gewisse $(h_1)_x,\dots,(h_n)_x \in \mathcal{O}_x$.

Sei U eine Umgebung von x , so daß gilt:

$f, g, h_i \in \mathcal{O}(U)$,

(*) gilt in U ,

d.h. $\left(\dfrac{f}{g}\right)^n + h_1\cdot\left(\dfrac{f}{g}\right)^{n-1} + \dots + h_n = 0$ in $\mathcal{M}(U)$,

h_i beschränkt in $U \ \forall\ i$

(das geht, da die h_i stetig sind) und

$\{x \in U \mid g(x) = 0\}$ ist nirgends dicht in X

(man beachte, daß $(g)_x$ ein Nichtnullteiler ist und verwende 1.1.) .

Dann gilt:

$\frac{f}{g}$ ist holomorph in $U \setminus \{x \in U | g(x) = 0\}$ und

$\frac{f}{g}$ ist beschränkt in U

(da die Nullstellen normierter Polynome "stetig von den Koeffizienten abhängen" und die Koeffizienten h_i beschränkt sind.)

Dann ist nach 1.3,(3) $\frac{f}{g} \in \mathcal{O}'(U)$, also $\alpha = \left(\frac{f}{g}\right)_x \in \mathcal{O}'_x$.

• 1.14. Bemerkung

Sei X ein komplexer Raum und $x \in X$.

Satz 1.13 liefert folgendes algebraische Normalitätskriterium:

x normaler Punkt von X

$\underset{\text{Def.1.6}}{\Longleftrightarrow}$ ${}_X\mathcal{O}'_x = {}_X\mathcal{O}_x$

$\underset{1.13}{\Longleftrightarrow}$ ${}_X\mathcal{O}_x$ ist ganz abgeschlossen in seinem totalen Quotientenring ${}_X\mathcal{M}_x$.

2. Normalisierung analytischer Mengen in einem Punkt

• 2.0. Vorbemerkung und Beispiel

Vorbemerkung:

Wir haben gesehen, daß es komplexe Räume gibt, die nicht in jedem Punkt normal sind (vgl. die Beispiele 1.4. und 1.7.). Unser Ziel ist es, zu jedem komplexen Raum einen normalen anzugeben, der möglichst viele Eigenschaften des gegebenen komplexen Raumes behält. Da Normalität unter biholomorphen Abbildungen vererbt wird, können wir uns dabei sicher *nicht* der biholomorphen Äquivalenz bedienen. Wir haben uns vielmehr zu einem komplexen Raum einen *bimeromorph* äquivalenten normalen zu verschaffen. Dazu werden wir in diesem Abschnitt zu jedem analytischen Mengenkeim einen bimeromorph äquivalenten, in gewissen Punkten (eines Repräsentanten natürlich) normalen analytischen Mengenkeim konstruieren und Eigenschaften dieser bimeromorphen Äquivalenz angeben. Wenn wir in Abschnitt 5. bzw. 6. die Offenheit der Menge der normalen Punkte gezeigt haben, werden wir damit zu jeder analytischen Menge "lokale Normalisierungen" gefunden haben. Die Angabe gewisser Eigenschaften für die Normalisierungen dient der Qualitätskontrolle: Wir können dann in Abschnitt 7. die Eindeutigkeit der lokalen Normalisierungen bis auf biholomorphe Äquivalenz (d.h. bis auf Kartenwechsel) nachweisen, was uns wiederum das Mittel in die Hand gibt, lokale Normalisierungen zu globalen zu verheften.

Beispiel:

Wir betrachten wie in Beispiel 1.4.

$$A := \left\{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{C}\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \middle| y \in \mathbb{C}\right\} \subseteq \mathbb{C}^2 .$$

Man kann A dadurch "normalisieren", daß man die beiden komplexen Geraden

$$\left\{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{C}\right\} \text{ und } \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \middle| y \in \mathbb{C}\right\} \quad \text{(eben die beiden Zweige von } A \text{)}$$

auseinanderzieht; dann verschwindet ja gerade der Schnittpunkt, der als einziger Punkt nichtnormal war. Damit der neue komplexe Raum in "derselben Richtung verläuft" wie A, wird man die Zweige parallel auseinanderziehen. Zur Beschreibung dieses Prozesses eignet sich bestens die in 1.4. eingeführte

schwach holomorphe Funktion $f : A \setminus \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} 0, \text{falls } y=0 \\ 1, \text{falls } x=0 \end{cases} \in \mathbb{C}$.

Der Graph von f zusammen mit den Punkten $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ liefert eine normale analytische Menge A_1 :

$$A_1 := \overline{\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y)\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} \in X \setminus \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}\right\}\right\}}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0\end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{C}\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 1\end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{C}\right\}$$

Die Projektion $\nu : A_1 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} \in A$ ist

eine surjektive holomorphe Abbildung und alle Punkte aus $\bar{\nu}^1\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}\right)$ sind normal.
Weiter ist

$$\nu | \bar{\nu}^1\left(A\setminus\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}\right\}\right) \longrightarrow A\setminus\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}\right\} \text{ sogar biholomorph und}$$

$$\bar{\nu}^1\left(A\setminus\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}\right\}\right) = A_1\setminus\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}\right\} \text{ ist dicht in } A_1 .$$

ν hat endliche Fasern, insbesondere entsprechen die Punkte der Faser $\bar{\nu}^1\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}\right)$ gerade den irreduziblen Komponenten von $(A)_{\binom{0}{0}}$.
Schließlich hat $\bar{\nu}^1$ dadurch, daß A_1 in derselben Richtung wie A läuft, eine gewisse Stetigkeitseigenschaft: ν ist eigentlich.

• 2.1. Definition

Seien X, X_1 komplexe Räume.
Eine holomorphe Abbildung $\rho : X_1 \to X$ heißt *eigentliche Modifikation*, wenn gilt: ρ ist eigentlich und hat endliche Fasern und
es gibt analytische (Ausnahme-) Mengen $A_1 \subseteq X_1$, $A \subseteq X$, so daß $X_1\setminus A_1$ und $X\setminus A$ dicht sind in X_1 bzw. X und
$\rho | X_1\setminus A_1 \to X\setminus A$ biholomorph ist.

Der Kürze halber reden wir im folgenden nur von Modifikation und lassen den Zusatz "eigentlich" weg.
Wir notieren (ohne Beweis) die einfachsten Eigenschaften der Modifikationen:

a) Eine Modifikation $\rho : X_1 \to X$ ist immer surjektiv.
(Beachte nur: $X\setminus A = \rho(X_1\setminus A_1) \subseteq \rho(X_1)$

$$\Rightarrow X = \overline{X\setminus A} \subseteq \overline{\rho(X_1)} = \rho(X_1) ,$$

wobei beim letzten Gleichheitszeichen verwendet wurde, daß eigentliche Abbildungen abgeschlossen sind.)

b) Die Hintereinanderausführung von Modifikationen liefert wieder eine Modifikation.
(Der Beweis ist *nicht* trivial.
Für den irreduziblen Fall siehe [GU] §6 (a) Corollary to Theorem 20,S.129.
Für den allgemeinen Fall siehe [WH] Chap.6 Sec.4 Theorem 4F,S.194)

• 2.2. Satz

Vor.: Sei $(A)_a$ ein *irreduzibler* analytischer Mengenkeim in einem Punkt $a \in \mathbb{C}^n$,

$(h)_a \in {}_A\mathcal{O}'_a$,

also $(h)_a \in {}_A\mathcal{M}_a$, $(h)_a$ ganz algebraisch über ${}_A\mathcal{O}_a$.

Beh.: Es gibt eine eigentliche Modifikation $\rho : A_1 \to A$ ($A \in (A)_a$ geeignet), so daß sich $h\circ\rho$ in jeden Punkt $a_1 \in \bar\rho^1(a)$ *holomorph* fortsetzen läßt,

genauer: $(h\circ\rho)_{a_1} \in {}_{A_1}\mathcal{O}_{a_1} \quad \forall\, a_1 \in \bar\rho^1(a)$

$\uparrow$

Keimbildung in ${}_{A_1}\mathcal{M}$

Man kann es überdies so einrichten, daß die zu ρ gehörige Ausnahmemenge $B \subseteq A$ in der Singularitätenmenge A^x von A liegt:

$B \subseteq A^x$.

Bemerkungen: 1) Es gilt natürlich auch die Umkehrung des Satzes:

Gibt es zu $(h)_a \in {}_A\mathcal{M}_a$ ein ρ wie in der Behauptung, dann ist $(h)_a$ schwach holomorph.

Denn dann ist h in einer Umgebung von a beschränkt:

Wegen $(h\circ\rho)_{a_1} \in {}_{A_1}\mathcal{O}_{a_1} \quad \forall\, a_1 \in \bar\rho^1(a)$ gibt es

eine Umgebung V von $\bar\rho^1(a)$, so daß $h\circ\rho|_V$ beschränkt ist.

Da ρ stetig und eigentlich ist, gibt es dazu nach einem topologischen Hilfssatz von STEIN ([KR](B.7) S.B-5; das ist genaugenommen nur die Abgeschlossenheit stetiger, eigentlicher Abbildungen)

eine Umgebung U von a mit $\bar\rho^1(U) \subseteq V$.

Dann ist

$$h(U\setminus\{a\}) = h\circ\rho(\bar\rho^1(U\setminus\{a\})) \subseteq (h\circ\rho)(V) \text{ beschränkt.}$$

(h möge o.B.d.A. auf $U\setminus\{a\}$ definiert sein.)

2) Man kann die Behauptung auch so interpretieren,

daß $(h\circ\rho)_a \in \rho_*({}_{A_1}\mathcal{O})_a$,

wenn man die Keimbildung in der Bildgarbe (!) $\rho_*({}_{A_1}\mathcal{M})$ betrachtet.

Beweis:

(1) Man wählt zunächst aus $(A)_a$ irreduzible Repräsentanten aus:

Da $(A)_a$ irreduzibel ist,

gibt es zu $A \in (A)_a$ beliebig kleine Umgebungen, $U(a) \subseteq \mathbb{C}^n$,

so daß $A \cap U \subseteq U \subseteq \mathbb{C}^n$ eine irreduzible (reindimensionale) analytische Menge wird.

(Anmerkung: Daß das mit einer generellen Wahl von A zu erreichen ist, folgt aus der Darstellung von A als verzweigte analytische Überlagerung gemäß dem lokalen Parametrisierungssatz.)

(Wir schreiben für $A \cap U \in (A)_a$ immer wieder nur A, d.h. wir wollen das alte A nach jeder neuen Wahl von U wieder vergessen.)

Für hinreichend kleine U gilt nun gleichzeitig:

$p(h) = 0$ in ${}_A\mathcal{M}$ für ein normiertes Pseudopolynom $p \in {}_U\mathcal{O}[X]$

(Anmerkung: Zunächst gilt die Gleichung $p(h) = 0$ natürlich nur dort, wo h tatsächlich definiert ist. Im übrigen hat man die (holomorphen) Koeffizienten von p auf A einzuschränken und dann p als Polynom aus ${}_A\mathcal{M}[X]$ zu betrachten.)

$h = \left(\frac{F}{G}\right)|_A$ in ${}_A\mathcal{M}$ für $F, G \in {}_U\mathcal{O}$, $G|_A \not\equiv 0$.

Denn:

$(h)_a$ ist ganz-algebraisch über ${}_A\mathcal{O}_a$, d.h.

$\tilde{\tilde{p}}(h) = 0$ in ${}_A\mathcal{M}_a$ für ein normiertes Polynom $\tilde{\tilde{p}} \in {}_A\mathcal{O}_a[X]$.

Wählt man U (genauer: A) genügend klein, dann kann man $\tilde{\tilde{p}}$ durch ein normiertes Pseudopolynom $\tilde{p} \in {}_A\mathcal{O}(A)[X]$ repräsentieren,

so daß $\tilde{p}(h) = 0$ in ${}_A\mathcal{M}(A)$.

Nach evtl. weiterem Verkleinern von U lassen sich die Koeffizienten von $\tilde{p}$ schließlich in U hinein holomorph fortsetzen und man erhält

ein normiertes Pseudopolynom $p \in {}_n\mathcal{O}(U)[X]$ mit "$p|_A$" $= \tilde{p}$.

Andererseits ist $(h)_a \in {}_A\mathcal{M}_a$, dem Quotientenkörper von ${}_A\mathcal{O}_a$, d.h.

$(h)_a = {(f)_a}/{(g)_a}$ für $(f)_a, (g)_a \in {}_A\mathcal{O}_a$, $(g)_a \not\equiv 0$.

Wählt man nun wieder U (genauer: A) klein genug, dann kann man $(f)_a$ und $(g)_a$ durch

holomorphe Funktionen $f, g \in {}_A\mathcal{O}(A)$ repräsentieren, $g \not\equiv 0$.

Nach evtl. weiterem Verkleinern von U lassen sich endlich f und g holomorph in U hinein fortsetzen und man erhält

holomorphe Funktionen $F, G \in {}_n\mathcal{O}(U)$ mit $F|_A = f$, $G|_A = g$.

(2) Wir betrachten nun einen "Graphen von h":

$$A_0 := \left\{(z, z_{n+1}) \in U \times \mathbb{C} \mid z \in A,\ p(z)(z_{n+1}) = 0,\ G(z)\cdot z_{n+1} - F(z) = 0\right\}$$

und die Projektion

$$\rho : U\times\mathbb{C} \to U$$

(Beh.): $\rho|A_0 \to A$ ist eine eigentliche und diskrete holomorphe Abbildung.

Offenbar genügt es zu zeigen,

daß $\rho|\underline{A_0} \to A$ eigentlich und diskret ist,

wobei $\underline{A_0} := \left\{(z,z_{n+1}) \in A\times\mathbb{C}\,|\,p(z)(z_{n+1}) = 0\right\}$.

(Man bedenke, daß die Einschränkungen eigentlicher Abbildungen auf abgeschlossene Teilmengen wieder eigentlich sind ; und A_0 ist abgeschlossen in $\underline{A_0}$!)

Dazu beachte man, daß für $z \in A$

$$(\rho|\underline{A_0} \to A)^{-1}(z) = \left\{(z,z_{n+1})\,|\,z_{n+1} \in \mathbb{C} \text{ ist Lösung der Gleichung } p(z)(z_{n+1}) = 0\right\} .$$

Dann hat zunächst mal $\rho|A_0 \to A$ endliche Fasern und da die Nullstellen normierter Polynome "stetig von den Koeffizienten abhängen", ist dann $\rho|A_0 \to A$ auch eigentlich (man sieht eben ein, daß die Urbilder von Kompakta beschränkt sind.)

(3) Sei nun $B_0 := \left\{(z,z_{n+1}) \in A_0\,|\,G(z) = 0\right\}$,

$B := \left\{z \in A\,|\,G(z) = 0\right\}$.

Da $G \not\equiv 0$ und A irreduzibel, liegt (die offene Menge) $A\setminus B$ dicht in A .

Weiter wird durch

$$H : \begin{cases} A\setminus B \longrightarrow A_0\setminus B_0 \\ z \longmapsto (z,h(z)) \end{cases}$$

eine holomorphe, bijektive Abbildung definiert mit $\rho\circ H|A_0\setminus B_0 \to A_0\setminus B_0 = \mathrm{Id}$

[Per definitionem ist H holomorph und injektiv.

$$(z,z_{n+1}) \in A_0\setminus B_0 \Rightarrow z_{n+1} = {}^{F(z)}/_{G(z)} = h(z) ,$$

also ist H auch surjektiv.]

Insbesondere ist

$$\rho|A_0\setminus B_0 \longrightarrow A\setminus B \text{ biholomorph.}$$

(4) Es bleibt zu überlegen, ob $A_0\setminus B_0$ dicht liegt in A_0.

Das ist wohl allgemein nicht richtig.

Man kann jedoch mit demselben $A_0\setminus B_0$ eine solche Situation herstellen:

Sei $k := \dim_a A$ und

A_1 die Vereinigung derjeniger (rein) k-dimensionalen irreduziblen Komponenten von A_0, auf denen G nicht identisch verschwindet

(beachte: $\rho | A_0 \setminus B_0 \to A \setminus B$ ist biholomorph und A nach (1) rein k-dimensional)

und

$$B_1 := \left\{ (z, z_{n+1}) \in A_1 \,|\, G(z) = 0 \right\} .$$

Dann liegt nach Konstruktion $A_1 \setminus B_1$ dicht in A_1:

$$\overline{A_1 \setminus B_1} = A_1$$

Andererseits ist aber auch

$$A_1 \setminus B_1 = A_0 \setminus B_0$$

[Trivialerweise ist $A_1 \setminus B_1 \subseteq A_0 \setminus B_0$.

Die umgekehrte Inklusion gilt aus Dimensionsgründen:

Zunächst setzen wir

$$A_0 = A_1 \cup A_1' \cup A_1'' ,$$

wobei A_1' die Vereinigung derjeniger (rein) k-dimensionalen irreduziblen Komponenten von A_0 sein soll, auf denen G identisch verschwindet, und

A_1'' die Vereinigung der *nicht* k-dimensionalen Komponenten von A_0.

Dann ist

$$A_0 \setminus B_0 = (A_1 \setminus B_0) \cup (A_1' \setminus B_0) \cup (A_1'' \setminus B_0) .$$

Hier liefern die Definitionen sofort

$$A_1 \setminus B_0 = A_1 \setminus B_1 \quad \text{und}$$
$$A_1' \setminus B_0 = \emptyset$$

Wir überlegen uns noch, daß auch $A_1'' \setminus B_0$ $(= A_1'' \cap (A_0 \setminus B_0)) = \emptyset$ ist:

Dazu genügt es nach Definition von A_1'' festzustellen,

daß A_0 in der Umgebung eines jeden Punktes aus $A_0 \setminus B_0$ rein k-dimensional ist.

Nach (3) hat aber A_0 in einer Umgebung von $(z, z_{n+1}) \in A_0 \setminus B_0$, die ganz in $A_0 \setminus B_0$ liegt, dieselbe Dimension wie A, also k.]

Dann folgt mit (3):

$\rho | A_1 \to A$ ist eine Modifikation

[Natürlich ist $\rho|A_1 \to A$ mit $\rho|A_0 \to A$ diskret.

[Die Eigentlichkeit gilt ebenso, da A_1 abgeschlossen ist in A_0.

(5) Für $(z,z_{n+1}) \in A_1\backslash B_1$ $(= A_0\backslash B_0)$ gilt

$$h\circ(\rho|A_1 \to A)(z,z_{n+1}) \underset{\text{Def.}\,\rho}{=\!=\!=} h(z) \underset{\text{vgl.(3)}}{=\!=\!=} z_{n+1} \;,$$

also da $A_1\backslash B_1$ dicht liegt in A_1 und $z_{n+1} : (z,z_{n+1}) \longmapsto z_{n+1}$ (dieser Bezeichnungsmißbrauch ist bei Koordinatenabbildungen üblich und zweckmäßig!) holomorph auf ganz A_1 ist:

$h\circ(\rho|A_1 \to A)$ ist holomorph auf ganz A_1 fortsetzbar:

$$h\circ(\rho|A_1 \to A) \underset{\text{(Def.)}}{=\!=\!=} z_{n+1}|A_1 \in {}_{A_1}\mathcal{O}(A_1)$$

Schreiben wir also ρ statt $\rho|A_1 \to A$,
dann haben wir eine Modifikation $\rho : A_1 \to A$ mit den gewünschten Eigenschaften gefunden.

(6) Zum Beweis der Zusatzbehauptung, daß die zu ρ gehörige Ausnahmemenge in A als in $A^{\times}$ gelegen angenommen werden darf, haben wir noch zu zeigen,

daß $A_1 \cap (A^{-}\times\mathbb{C}) \subseteq \left\{(z,h(z))\,|\,z \in A^{-}\right\}$.

Da sowohl B (vgl.(3)!) als auch $A^{\times}$ nirgends dicht in A sind, ist ihre Vereinigung nirgends dicht in A :

$\overline{A^{-}\backslash B}$ $(= \overline{A\backslash(A^{\times} \cup B)}) = A$.

Da $h = \left(\frac{F}{G}\right)|A$ (in ${}_{A}\mathcal{M}(A)$) und h schwach holomorph auf A , ist h auf $(A\backslash B) \cup A^{-}$ definiert und stetig.

Zusammen folgt, daß A_1 zumindest über A^{-} im Graph von h liegt:

$$A_1 \cap (A^{-}\times\mathbb{C}) \subseteq \left\{(z,h(z))\,|\,z \in A^{-}\right\} .$$

[Nach (4) ist

$$A_1 = \overline{A_1\backslash B_1} = \overline{A_0\backslash B_0} .$$

Nach (3) ist

$$A_0\backslash B_0 = H(A\backslash B) = \left\{(z,h(z))\,|\,z \in A\backslash B\right\} .$$

Zusammen:

$$A_1 = \overline{\{(z,h(z))\,|\,z \in A\backslash B\}}$$

$$= \overline{\{\lim_{\nu}(z_\nu,h(z_\nu))\,|\,(z_\nu)_\nu \subseteq A^{-}\backslash B \;,\; \lim_{\nu} z_\nu \notin B\}}$$

(da $A = \overline{A^{-}\backslash B}$ und $h|A\backslash B$ stetig)

$$\subseteq \overline{\{(z,h(z))| z \in A^-\}}$$

$$\Rightarrow A_1 \cap (A^- \times \mathbb{C}) \subseteq \overline{\{(z,h(z))| z \in A^-\}} \cap (A^- \times \mathbb{C})$$

$$= \left\{(z,h(z))| z \in A^-\right\}$$

(da $h|A^-$ stetig)

Nun ist wie in (3) klar, daß

ρ über $A\backslash(B \cap A^X)$ biholomorph ist.

2.3. Bemerkung

Sei die Situation wie eben in 2.2.
Wir hatten dort

eine analytische Menge $A \subseteq U \subseteq \mathbb{C}^n$ und

eine Modifikation $\rho : A_1 \to A$ mit $A_1 \subseteq A \times \mathbb{C}$.

Die analytische Menge A_1 ließ sich so beschreiben:

$$\begin{cases} \rho \qquad\qquad\qquad : A_1 \to A \ , \quad \rho = (pr : U\times\mathbb{C} \to U)|A_1 \to A \\ h\circ\rho = z_{n+1}|A_1 : A_1 \to \mathbb{C} \ , \quad z_{n+1} = pr : U\times\mathbb{C} \to \mathbb{C} \end{cases}$$

Weiter haben wir ein normiertes Polynom p mit der Einsetzung

$$p(z_{n+1}) \in {}_n\mathcal{O}(U)[z_{n+1}] \cap I_{A_1}(U) \qquad (\subseteq {}_{n+1}\mathcal{O}(U\times\mathbb{C}))$$

[Zunächst ist

$p \in {}_n\mathcal{O}(U)[X]$ mit $p(h) = 0$.

Faßt man nun p auf als Element von ${}_{n+1}\mathcal{O}(U\times\mathbb{C})[X]$,
d.h. betrachtet man $p_1 :=$ "$p \circ (pr : U\times\mathbb{C} \to U)$" statt p
(Gemeint ist natürlich die Komposition der Koeffizienten),

[dann ist $p_1(z_{n+1})|A_1 = p(h)\circ\rho = 0$.

Wir hatten schon erwähnt (Bemerkung 2) zu 2.2.), daß

$(z_{n+1}|A_1)_a$ $(=(h\circ\rho)_a) \in \rho_*({}_{A_1}\mathcal{O})_a$ (Keimbildung in der Bildgarbe!)

Faßt man ${}_A\mathcal{O}_a$ als Unterring von $\rho_*({}_{A_1}\mathcal{O})_a$ auf (vermöge der Identifikation von $(f)_a \in {}_A\mathcal{O}_a$ mit $(f\circ\rho)_a \in \rho_*({}_{A_1}\mathcal{O})_a$) , dann liegt

$${}_A\mathcal{O}_a[(z_{n+1}|A_1)_a] \subseteq \rho_*({}_{A_1}\mathcal{O})_a \ .$$

Diese Ringe sind nun in unserem Fall sogar gleich:

Da ρ eigentlich und diskret ist, gilt nämlich für die Halme der Bildgarbe

$$\rho_*({}_{A_1}\mathcal{O})_a \cong \bigoplus_{a_1\in\bar{\rho}^1(a)} {}_{A_1}\mathcal{O}_{a_1}$$

(vgl. zu dieser einfachen Feststellung etwa [FI] S.57; das ist nur der in Bemerkung 1) zu 2.2. zitierte topologische Hilfssatz von STEIN).

Fassen wir nun ein $(g)_a \in \rho_*({}_{A_1}\mathcal{O})_a$ als Funktionselement von $\bigoplus_{a_1\in\bar{\rho}^1(a)} {}_{A_1}\mathcal{O}_{a_1}$ auf und setzen diesen Keim in eine Umgebung $\tilde{U} \subseteq U\times\mathbb{C}$ von $\bar{\rho}^1(a)$ fort:

$$g \in {}_{n+1}\mathcal{O}(\tilde{U}) \quad , \quad \tilde{U}(\bar{\rho}^1(a)) \subseteq U\times\mathbb{C} \ .$$

Nun kann man jeden Keim $(g)_{a_1}$ nach dem WEIERSTRASS'schen Divisionssatz durch $(p(z_{n+1}))_{a_1}$ teilen ($p(z_{n+1})$ ist normiert!) und man erhält

$$(g)_{a_1} = \underbrace{(p(z_{n+1}))_{a_1}}_{\in\ (I_{A_1})_{a_1}} \cdot q + (r)_{a_1}$$

$$\text{mit } (r)_{a_1} \in {}_n\mathcal{O}_a[(z_{n+1})_{a_1}]$$

(dabei ist die Keimbildung jeweils in ${}_{n+1}\mathcal{O}$ gemeint).

Mithin kann man $(g)_a$ (d.h. $((g|A_1)_{a_1})_{a_1\in\bar{\rho}^1(a)}$) auffassen als Funktionselement von $\bigoplus_{a_1\in\bar{\rho}^1(a)} {}_A\mathcal{O}_a[(z_{n+1}|A_1)_{a_1}]$ und diese direkte Summe entspricht gerade ${}_A\mathcal{O}_a[(z_{n+1}|A_1)_a]$.

Wir halten also fest:

$$\boxed{\rho_*({}_{A_1}\mathcal{O})_a = \left({}_A\mathcal{O}_a[(z_{n+1}|A_1)_a] =\right) {}_A\mathcal{O}_a[(h\circ\rho)_a]}$$

Wir schreiben im folgenden naheliegender $(h)_a$ statt $(h\circ\rho)_a$.

• 2.4. Bemerkung

Wir wollen uns nun überlegen, daß die Irreduzibilitätsvoraussetzung in den vorhergehenden beiden Punkten unwesentlich ist; diese Voraussetzung hatte nur beweistechnische Gründe.

Zunächst bemerken wir, daß

eine Funktion $f : X^- \to \mathbb{C}$ (X ein komplexer Raum) genau dann schwach holomorph ist,
wenn f auf den irreduziblen Komponenten von X schwach holomorph ist.

[Da die Aussagen lokaler Natur sind, können wir für X eine lokalanalytische Menge im $\mathbb{C}^n$ nehmen, so daß (vgl. 1.1.)

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_r \text{ eine Zerlegung in irreduzible Komponenten ist.}$$

Nun zu dem Beweis der einfachen Richtung der Behauptung:

"$\Rightarrow$" Sei $f : X^- \to \mathbb{C}$ schwach holomorph.

Dann ist $f|X_i \setminus (X^x \cap X_i)$ natürlich holomorph und

$X^x \cap X_i$ ist nirgends dicht in X_i .

Die Lokalbeschränktheit ist unmittelbar klar.

"$\Leftarrow$" Diese Richtung brauchen wir zwar hernach nicht, aber wir wollen den Beweis doch kurz skizzieren:

Sei nun $f|X_i^- \to \mathbb{C}$ schwach holomorph $\forall\ i = 1,\ldots,r$.

Wegen

$$\bigcup_{i=1}^{r} X_i^x \subseteq X^x$$

ist dann $f|X^-$ natürlich holomorph.

Die Lokalbeschränktheit von f folgert man aus der Lokalbeschränktheit der Restriktionen $f|X_i$.

Sei nun $(A)_a$ irgendein (evtl. reduzibler) analytischer Mengenkeim in einem Punkt $a \in \mathbb{C}^n$, $(h)_a \in {}_A\mathcal{O}'_a$.

Nach 1.1. gibt es beliebig kleine Umgebungen $U = \mathring{U}(a) \subseteq \mathbb{C}^n$, so daß gilt:

Ist $A \cap U = A_1 \cup \ldots \cup A_r$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten, dann ist $(A_i)_a$ irreduzibel $\forall\ i = 1,\ldots,r$.

Nach obiger Bemerkung ist nun

$(h)_a \in (A_i)_a \quad \forall\ i = 1,\ldots,r$.

Nun gibt es nach Satz 2.2. und Bemerkung 2.3. zu jedem $i = 1,\ldots,r$ eine eigentliche Modifikation $\rho_i : A_{i1} \to A_i$,

so daß $\rho_{i*}({}_{A_{i1}}\mathcal{O})_a = {}_{A_i}\mathcal{O}_a[(h)_a]$

(man beachte die Konvention am Ende von 2.3.)

wenn man nur U klein genug gewählt hat.

Die analytischen Mengen A_{i1} seien paarweise disjunkt gewählt.

Sei nun

$$A_1 := \bigcup_{i=1}^{r} A_{i1} \text{ und}$$

$\rho : A_1 \to A$ definiert durch $\rho|A_{i1} = \rho_i \quad (i = 1,\ldots,r)$

(Wir haben wieder A geschrieben statt $A \cap U$.)

Dann ist A_1 eine analytische Menge (siehe evtl. [WH] Chap.3 Sec.2 Lemma 2L, S.79) und ρ ist eine eigentliche Modifikation (die definierenden Eigenschaften einer Modifikation sind nach Definition von ρ über die Modifikationen ρ_i natürlich erfüllt.)

Definiert man die ρ_i wie im Beweis zu 2.2. durch Projektionsabbildungen, dann hat ρ dieselbe Form; insbesondere kann man (außer der Irreduzibilität von A in a) dieselbe Situation erreichen wie in 2.3. (man beachte, daß das dort definierte Pseudopolynom p weder etwas mit der Irreduzibilität von A in a zu tun hat noch für jedes A_i verschieden gewählt werden müßte).

Dann liefert dasselbe Argument wie in 2.3.:

$$\rho_*({}_{A_1}\mathcal{O})_a = {}_A\mathcal{O}_a[(h)_a]$$

Wir stellen das Resultat nochmals zusammen:

• 2.5. Korollar

Vor.: Sei $(A)_a$ ein analytischer Mengenkeim in einem Punkt $a \in \mathbb{C}^n$,

$(h)_a \in {}_A\mathcal{O}'_a$.

Beh.: Es gibt eine eigentliche Modifikation $\rho : A_1 \to A$ ($A \in (A)_a$ geeignet), so daß sich $h \circ \rho$ in jeden Punkt $a_1 \in \bar{\rho}^1(a)$ *holomorph* fortsetzen läßt,

genauer: $(h\circ\rho)_{a_1} \in {}_{A_1}\mathcal{O}_{a_1} \quad \forall\ a_1 \in \bar{\rho}^1(a)$.

Es gilt bei geeigneter Wahl von ρ sogar

$$\rho_*({}_{A_1}\mathcal{O})_a = {}_A\mathcal{O}_a[(h)_a] .$$

Überdies kann man es so einrichten, daß die zu ρ gehörige Ausnahmemenge $B \subseteq A$ in der Singularitätenmenge A^x von A liegt:

$B \subseteq A^x$.

Bemerkung: Es gilt natürlich auch die Umkehrung des Satzes:

Gibt es zu $(h)_a \in {}_A\mathcal{M}_a$ ein ρ wie in der Behauptung, dann ist $(h)_a$ schwach holomorph.

(Der Beweis ist wörtlich derselbe wie in Satz 2.2. Bemerkung 1))

• 2.6. Korollar

Vor.: Sei $(A)_a$ ein analytischer Mengenkeim in einem Punkt $a \in \mathbb{C}^n$,

$(h_1)_a,\dots,(h_r)_a \in {}_A\mathcal{O}'_a$.

Beh.: Es gibt eine eigentliche Modifikation $\rho : A_1 \to A$ ($A \in (A)_a$ geeignet),

so daß ${}_A\mathcal{O}_a[(h_1)_a,\dots,(h_r)_a] = \rho_*({}_{A_1}\mathcal{O})_a$.

Man kann es überdies so einrichten, daß die zu ρ gehörige Ausnahmemenge $B \subseteq A$ in der Singularitätenmenge A^x von A liegt:

$B \subseteq A^x$.

Bemerkungen: 1) Es gilt natürlich auch die Umkehrung der Behauptung:

Ist $\rho : A_1 \to A$ eine eigentliche Modifikation,

dann ist $\rho_*({}_{A_1}\mathcal{O})_a = {}_A\mathcal{O}_a[(h_1)_a,\dots,(h_r)_a]$

für geeignete schwach holomorphe Funktionskeime

$(h_i)_a,\dots,(h_r)_a$,

denn dann ist

nach der Bemerkung zu Korollar 2.5.

$\rho_*({}_{A_1}\mathcal{O})_a$ ein ${}_A\mathcal{O}_a$ - Untermodul von ${}_A\mathcal{O}'_a$.

Nach Lemma 1.12. ist dieser Untermodul endlich erzeugt über ${}_A\mathcal{O}_a$.

2) Nach 1.12. ist insbesondere ${}_A\mathcal{O}'_a$ endlich erzeugt über ${}_A\mathcal{O}_a$.

Daher ist nun

$${}_A\mathcal{O}'_a = \rho_*({}_{A_1}\mathcal{O})_a$$

für eine geeignete Modifikation $\rho : A_1 \to A$.

Man nennt so eine Modifikation recht suggestiv eine "Normalisierung von A in a ".

Diese "punktuale" Normalisierung ist in gewisser Weise eine *maximale* Normalisierung. Man kann dieses Maximalsein für den Fall, daß $(A)_a$ irreduzibel ist, auch tatsächlich geometrisch präzisieren:

a) Die Normalisierung ist *eindeutig* bestimmt.

b) Ist $\rho : A_1 \to A$ die Normalisierung von A in a und ist $\rho' : A'_1 \to A$ eine eigentliche Modifikation, dann ist ρ' ein Faktor von ρ in dem Sinne:

$$\rho = \rho' \circ f \text{ für eine holomorphe Abbildung } f : A_1 \to A'_1 .$$

Der Beweis dieser Aussagen (A und A_1 müssen natürlich klein genug sein!) steckt in einem (relativ einfachen) Liftungskriterium für Modifikationen.

Siehe dazu [GU] §6 (d) Theorem 23, S.145.

Wir können die Eindeutigkeitsaussagen in der Form nicht brauchen und wollen daher die Beweise auch nicht ausführen.

Beweis:

Der Beweis wird mit Hilfe der Aussage 2.5. durch Induktion erbracht:

<u>Induktionsanfang:</u>

Sei $r = 1$.

Dann ist nach 2.5.

$$_A\mathcal{O}_a[(h_1)_a] = \rho_{1*}(_{A_1}\mathcal{O})_a \quad \text{für eine eigentliche Modifikation } \rho_1 : A_1 \to A$$

<u>Induktionsschluß:</u>

Sei (o.B.d.A.) $r = 2$ und

$$_A\mathcal{O}_a[(h_1)_a] = \rho_{1*}(_{A_{11}}\mathcal{O})_a \quad \text{für eine eigentliche Modifikation } \rho_1 : A_{11} \to A .$$

O.B.d.A. seien die Zusammenhangskomponenten (ZHK) der $a_{11} \in \bar{\rho}_1^{1}(a)$ disjunkt (das macht wieder die Folgerung aus dem topologischen Hilfssatz von STEIN in [FI] S.57):

$$(\text{ZHK von } a_{11}) =: A_{11}(a_{11}) , \quad \text{alle } A_{11}(a_{11}) \text{ disjunkt.}$$

Wir transportieren $(h_2)_a$ auf A_{11}:

$$(h_2 \circ \rho_1)_{a_{11}} \in {}_{A_{11}}\mathcal{O}'_{a_{11}} \quad \forall\, a_{11} \in \bar{\rho}_1^{1}(a) .$$

Dann gibt es nach 2.5. für jedes $a_{11} \in \bar{\rho}_1^{1}(a)$ (evtl. nach Verkleinern von A)

eine Modifikation $\rho_{a_{11}} : A_{a_{11}} \to A_{11}(a_{11})$,

so daß $(h_2 \circ \rho_1 \circ \rho_{a_{11}})_{a_1} \in {}_{A_{a_{11}}}\mathcal{O}_{a_1} \quad \forall\, a_1 \in \bar{\rho}_{a_{11}}^{1}(a_{11})$ und

$$\rho_{a_{11}*}(_{A_{a_{11}}}\mathcal{O})_{a_{11}} = {}_{A_{11}}\mathcal{O}_{a_{11}}[(h_2 \circ \rho_1)_{a_{11}}] .$$

Die analytischen Mengen $A_{a_{11}}$ seien paarweise disjunkt gewählt.
Sei nun

$$A_1 := \bigcup_{a_{11} \in \bar{\rho}_1^{1}(a)} A_{a_{11}} \quad \text{und}$$

$$\rho_2 : A_1 \to A_{11} \text{ definiert durch } \rho_2 | A_{a_{11}} = \rho_{a_{11}} \quad (a_{11} \in \bar{\rho}_1^{1}(a))$$

Dann ist (wie in 2.4.) A_1 eine analytische Menge und
ρ_2 eine eigentliche Modifikation.
Wir verwenden nun, daß die Hintereinanderausführung von Modifikationen wieder eine Modifikation ist (siehe 2.1.b)) .

Dann ist

$$\rho := \rho_1 \circ \rho_2 : A_1 \to A \text{ eine Modifikation und}$$

$$\rho_*(_{A_1}\mathcal{O})_a = {}_A\mathcal{O}_a[(h_1)_a, (h_2)_a] .$$

Die letzte Gleichung sieht man so ein:

$$\rho_*(A_1\mathcal{O})_a = \bigoplus_{a_1\in\bar\rho^{-1}(a)} A_1\mathcal{O}_{a_1} \qquad \text{(wie in 2.3.)}$$

$$= \bigoplus_{a_{11}\in\bar\rho_1^{-1}(a)} \bigoplus_{\substack{a_1\in\bar\rho^{-1}(a)\\ a_1\in A_{a_{11}}}} (A_{a_{11}}\mathcal{O}_{a_1}) \quad (\text{da nach Def. } A_1 = \dot{\bigcup_{a_{11}\in\bar\rho_1^{-1}(a)}} A_{a_{11}})$$

$$= \bigoplus_{a_{11}\in\bar\rho_1^{-1}(a)} \bigoplus_{a_1\in\bar\rho_{a_{11}}^{-1}(a_{11})} (A_{a_{11}}\mathcal{O}_{a_1})$$

$$\left[\begin{aligned} \bar\rho^{-1}(a)\cap A_{a_{11}} &= (\rho_2|A_{a_{11}})^{-1}\,\bar\rho_1^{-1}(a) \qquad (\rho = \rho_1\circ\rho_2!) \\ &= (\rho_2|A_{a_{11}}\to A_{11}(a_{11}))^{-1}(\rho|A_{11}(a_{11}))^{-1}(a) \\ &\quad (\text{ da } \rho_2(A_{a_{11}}) = A_{11}(a_{11})!) \\ &= \bar\rho_{a_{11}}^{-1}(a_{11}) \end{aligned}\right.$$

$$= \bigoplus_{a_{11}\in\bar\rho_1^{-1}(a)} \rho_{a_{11}*}(A_{11}\mathcal{O})_{a_{11}}$$

$$= \bigoplus_{a_{11}\in\bar\rho_1^{-1}(a)} \left(A_{11}\mathcal{O}_{a_{11}}[(h_2\circ\rho_1\circ\rho_{a_{11}})]\right)$$

$$= \left(\bigoplus_{a_{11}\in\bar\rho_1^{-1}(a)} A_{11}\mathcal{O}_{a_{11}}\right)\left[((h_2\circ\rho_1\circ\rho_2)_{a_{11}})_{a_{11}\in\bar\rho_1^{-1}(a)}\right]$$

$$= \left(\bigoplus_{a_{11}\in\bar\rho_1^{-1}(a)} A_{11}\mathcal{O}_{a_{11}}\right)[(h_2\circ\rho)_a]$$

$$\left[\begin{aligned} (h_2\circ\rho)_a &= \left(((h_2\circ\rho_1\circ\rho_2)_{a_1})_{a_1\in\bar\rho_2^{-1}(a_{11})}\right)_{a_{11}\in\bar\rho_1^{-1}(a)} \\ &= ((h_2\circ\rho_1\circ\rho_2)_{a_{11}})_{a_{11}\in\bar\rho_1^{-1}(a)} \end{aligned}\right.$$

$$= \rho_{1*}(A_{11}\mathcal{O})_a\,[(h_2\circ\rho)_a]$$

$$= {}_A\mathcal{O}_a[(h_1\circ\rho_1)_a]\,[(h_2\circ\rho)_a] \qquad (\text{nach Def. von } \rho_1)$$

$$= {}_A\mathcal{O}_a[(h_1\circ\rho)_a\,,\,(h_2\circ\rho)_a]$$

⌈ Es ist

$$(h_1 \circ \rho)_a = (h_1 \circ \rho_1)_a \ ,$$

wenn man $\rho_{1*}({}_{A_{11}}\mathcal{O})_a$ in $\rho_*({}_{A_1}\mathcal{O})_a$ einbettet vermöge

$$\begin{array}{ccc} \rho_{1*}({}_{A_{11}}\mathcal{O})_a & \hookrightarrow & \rho_*({}_{A_1}\mathcal{O})_a \\ \bigoplus\limits_{a_{11} \in \bar{\rho}_1^{-1}(a)} \underbrace{{}_{A_{11}}\mathcal{O}_{a_{11}}} & \hookrightarrow & \bigoplus\limits_{a_{11} \in \bar{\rho}_1^{-1}(a)} \underbrace{\bigoplus\limits_{a_1 \in \bar{\rho}_2^{-1}(a_{11})} {}_{A_1}\mathcal{O}_a} \end{array}$$

Denn dann gilt:

$$\begin{aligned} (h_1 \circ \rho)_a &= \Big(((h_1 \circ \rho_1 \circ \rho_2)_{a_1})_{a_1 \in \bar{\rho}_2^{-1}(a_{11})} \Big)_{a_{11} \in \bar{\rho}_1^{-1}(a)} \\ &\text{"="} \ ((h_1 \circ \rho_1)_{a_{11}})_{a_{11} \in \bar{\rho}_1^{-1}(a)} \\ &= (h_1 \circ \rho_1)_a \end{aligned}$$

⌊

• 2.7. Satz

Vor.: Sei $(A)_a$ ein analytischer Mengenkeim in einem Punkt $a \in \mathbb{C}^n$.

Beh.: Es gibt eine eigentliche Modifikation $\rho : A_1 \to A$ ($A \in (A)_a$ geeignet),

so daß ${}_A\mathcal{O}'_a = \rho_*({}_{A_1}\mathcal{O})_a$.

Insbesondere ist A_1 normal in den Punkten $a_1 \in \bar{\rho}^1(a)$.

Man kann es dabei so einrichten, daß die zu ρ gehörige Ausnahmemenge $B \subseteq A$ in der Singularitätenmenge A^X von A liegt: $B \subseteq A^X$.

Beweis:

Die Existenz von ρ folgt sofort aus 2.6. zusammen mit 1.12.

Sei nun $a_1 \in \bar{\rho}^1(a)$ und $(h)_{a_1} \in {}_{A_1}\mathcal{O}'_{a_1}$.

Dann ist nach Definition einer Modifikation

$$\Big(h \circ (\rho | A_1 \setminus B_1 \to A \setminus B)^{-1} \Big)_a \in {}_A\mathcal{O}'_a = \rho_*({}_{A_1}\mathcal{O})_a \ .$$

wobei $B_1 \subseteq A_1$ und $B \subseteq A$ die zu ρ gehörigen Ausnahmemengen sind.

(Selbstverständliche Beschränkungsabbildungen wurden fortgelassen!)

Daraus folgt

$$(h)_{a_1} = \Big(h \circ (\rho | A_1 \setminus B_1 \to A \setminus B)^{-1} \circ \rho \Big)_{a_1} \in {}_{A_1}\mathcal{O}_a \ .$$

Also ist ${}_{A_1}\mathcal{O}'_{a_1} \subseteq {}_{A_1}\mathcal{O}_a$ und A_1 ist in a_1 normal für alle $a_1 \in \bar{\rho}^1(a)$.

Für eine spätere Anwendung stellen wir hier noch bereit:

• 2.8. Bemerkung

Vor.: Sei $(A)_a$ ein analytischer Mengenkeim in einem Punkt $a \in \mathbb{C}^n$.

$\rho : A_1 \to A$ $(A \in (A)_a)$ sei eine eigentliche Modifikation und

A_1 sei normal in den Punkten $a_1 \in \overset{-1}{\rho}(a)$.

Beh.: ${}_A\mathcal{O}'_a = \rho_*({}_{A_1}\mathcal{O})_a$

Beweis:

"$\subseteq$" Sei $h \in {}_A\mathcal{O}'_a$.

Dann ist nach Definition einer Modifikation

$$(h\circ\rho)_{a_1} \in {}_{A_1}\mathcal{O}'_{a_1} \underset{\text{Vor.}}{=} {}_{A_1}\mathcal{O}_{a_1} \qquad \forall\, a_1 \in \overset{-1}{\rho}(a)$$

$$\Rightarrow ((h\circ\rho)_{a_1})_{a_1\in\overset{-1}{\rho}(a)} \in \bigoplus_{a_1\in\overset{-1}{\rho}(a)} {}_{A_1}\mathcal{O}_a = \rho_*({}_{A_1}\mathcal{O})_a$$

"$\supseteq$" Wieder nach Definition einer Modifikation (wie in 2.7. gehabt).

3. Nennergarben

Sei X ein komplexer Raum und
sei G eine kohärente analytische Modulgarbe von meromorphen Funktionskeimen. Wir werden beim Beweis der Offenheit der Menge der normalen Punkte von X (vgl. 5.9./10.) auf folgendes Problem stoßen:

> Es wird eine Garbe konstruiert werden, deren Halm in einem gegebenen Punkt $x \in X$ sich mit Hilfe von gebrochenen Idealen $\mathcal{O}_x : G_x$ algebraisch darstellen lassen. Wir wollen dann schließen, daß sich diese Darstellung des Halmes in x sofort auf die Halme in einer vollen Umgebung von x ausdehnen läßt.

Wir bereiten die Lösung dieses Problems hier mit einigen technischen Hilfssätzen vor. Zunächst führen wir auf X in ganz natürlicher Weise eine Garbe $\mathcal{O} : G$ ein, deren Halme gerade die Idealquotienten $\mathcal{O}_x : G_x$ $(x \in X)$ sind. Dann weisen wir nach - das wird man bei obiger Aufgabenstellung auch erwarten -, daß diese Garbe kohärent ist.

• 3.1. Bemerkung

Vor.: U sei eine offene Umgebung von $x \in X$

$m \in {}_X\mathcal{M}(U)$

Beh.: $(m)_x \in \mathcal{O}_x : G_x \iff$ Man kann U so verkleinern, daß

$m|V \cdot G(V) \subseteq \mathcal{O}(V) \quad \forall\, V = \overset{\circ}{V} \subseteq U$

Bew.: $(m)_x \in \mathcal{O}_x : G_x \iff (m)_x G_x \subseteq \mathcal{O}_x$

$\iff (m)_y G_y \subseteq \mathcal{O}_y \quad \forall\, y \in U,$ falls U hinreichend klein

⌈"⇒" Da G kohärent, ist G endlich erzeugt, also

$\exists\, g_1,\dots,g_k \in G(U)$ mit $G_y = \sum_{i=1}^{k} (g_i)_y \mathcal{O}_y \quad \forall\, y \in U,$

falls U klein genug ist.

Daraus folgt nun:

$(m)_x G_x \subseteq \mathcal{O}_x$

$\iff (m)_x (g_i)_x \in \mathcal{O}_x \quad \forall_i$

$\iff (m)_y (g_i)_y \in \mathcal{O}_y$, o.B.d.A. $\forall\, y \in U$

$\iff (m)_y G_y \subseteq \mathcal{O}_y \quad \forall\, y \in U$

⌊

$\iff m|V \cdot G(V) \subseteq \mathcal{O}(V) \quad \forall\, V = \overset{\circ}{V} \subseteq U$

Nach dieser Bemerkung fällt es nicht mehr schwer, eine Garbe $\mathcal{O} : G$ durch ein Garbendatum zu definieren:

• 3.2. Definition

Für $U = \overset{\circ}{U} \subseteq X$ setze man

$$(\mathcal{O} : G)(U) := \{m \in {}_X M(U) \mid m|V \cdot G(V) \subseteq \mathcal{O}(V) \quad \forall\, V = \overset{\circ}{V} \subseteq U\}.$$

$\mathcal{O} : G$ bezeichne die durch das Garbendatum

$$((\mathcal{O} : G(U))_{U = \overset{\circ}{U} \subseteq X}, (\rho_V^U)_{V \underset{\text{offen}}{\subseteq} U}), \text{ wobei}$$

ρ_V^U die natürliche Beschränkungsabbildung von U auf V bezeichnet,

induzierte Garbe von $\mathcal{O}$-Moduln.

$\mathcal{O} : G$ heißt *Nennergarbe* von G.

Bemerkungen: 1) Zur Definition von $\mathcal{O} : G$ ist es nicht notwendig, G als kohärent vorauszusetzen; $\mathcal{O} : G$ ist eine wohldefinierte Garbe für jede analytische Modulgarbe G von meromorphen Funktionskeimen.

2) Die Definitionsgleichung für $(\mathcal{O} : G)(U)$ legt die Bezeichnung Nennergarbe zwar nahe; man beachte jedoch, daß nicht jedes Element $m \in (\mathcal{O} : G)(U) \cap \mathcal{O}(U)$ wirklich als lokaler Nenner einer Funktion aus G(V) auftreten kann (nämlich dann nicht, wenn $m|V$ ein Nullteiler in $\mathcal{O}(V)$ ist.)

Nach Konstruktion sind die Halme $(\mathcal{O} : G)_x$ $(x \in X)$ und die gebrochenen Ideale $\mathcal{O}_x : G_x$ in natürlicher Weise zueinander isomorph (wobei G natürlich wieder als kohärent vorausgesetzt ist). Wir identifizieren daher

$$(\mathcal{O} : G)_x = \mathcal{O}_x : G_x \quad \forall\, x \in X.$$

Das Ziel der letzten Punkte dieses Abschnitts ist der Nachweis, daß unter bestimmten - funktionentheoretisch gesehen einfachen - Voraussetzungen die Garbe $\mathcal{O} : G$ kohärent ist. Eine naheliegende weitere algebraische Interpretation der Halme $\mathcal{O}_x : G_x$ wird uns erlauben, dies sofort aus den üblichen Erhaltungssätzen der Kohärenz abzulesen.

• 3.3. Bemerkung

(1) $\mathcal{O}_x : G_x = \{(m)_x \in {}_X M_x \mid (m)_x G_x \subseteq \mathcal{O}_x\}$.

Die Bedingung $(m)_x G_x \subseteq \mathcal{O}_x$, also

$$(m)_x (g)_x \in \mathcal{O}_x \quad \forall\, (g)_x \in G_x$$

bedeutet für ein $(m)_x \in M_x$ gerade, daß durch

$$h_{(m)_x} : G_x \ni (g)_x \to (m)_x (g)_x \in \mathcal{O}_x$$

eine Abbildung wohldefiniert wird.

Natürlich ist $h_{(m)_x}$ sogar ein $\mathcal{O}_x$-Modul-Homomorphismus.

Also:

$$\mathcal{O}_x : G_x = \{(m)_x \in M_x \mid h_{(m)_x} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(G_x,\mathcal{O}_x) \text{ ist wohldefinierbar}\}$$

(2) Andererseits erlaubt jeder Homomorphismus $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(G_x,\mathcal{O}_x)$ unter bestimmten Umständen sogar die Darstellung $h = h_{(m)_x}$ mit einem $(m)_x \in M_x$. Wir berechnen dazu h:

Zunächst genügt es wegen der $\mathcal{O}_x$-Linearität, die Werte von h auf $G_x \cap \mathcal{O}_x$ zu kennen, denn:

Für $\frac{(g')_x}{(g'')_x} \in G_x$, wobei $(g')_x, (g'')_x \in \mathcal{O}_x$, gilt

$$h\left(\frac{(g')_x}{(g'')_x}\right) = \frac{(g'')_x\, h\left(\frac{(g')_x}{(g'')_x}\right)}{(g'')_x} = \frac{h((g')_x)}{(g'')_x}$$

Da G eine analytische Modulgarbe, ist tatsächlich

$$(g')_x \in (g'')_x G_x \subseteq G_x.$$

Auf $\mathcal{O}_x \cap G_x$ folgt aus der $\mathcal{O}_x$-Linearität für h insbesondere die Multiplikativität, die sofort folgende merkwürdige Symmetrie liefert:

$$(f)_x h((g)_x) \;(= h((f)_x(g)_x)\,) = (g)_x h((f)_x) \quad \forall\, (f)_x,(g)_x \in \mathcal{O}_x \cap G_x.$$

Diese Formel erlaubt die Berechnung von $h|\mathcal{O}_x \cap G_x$ auf einfache Weise aus einem einzigen Wert, falls in $\mathcal{O}_x \cap G_x$ wenigstens ein Nichtnullteiler $(f)_x$ existiert:

$$h((g)_x) = (g)_x \cdot \underbrace{\frac{h((f)_x)}{(f)_x}}_{=:\,(m_h)_x} \qquad \forall\, (g)_x \in \mathcal{O}_x \cap G_x$$

Zusammen mit obigem folgt

$$h((g)_x) = \frac{h((g')_x)}{(g'')_x} = \frac{(g')_x \cdot (m_h)_x}{(g'')_x} = (g)_x \cdot (m_h)_x \;, \forall\, (g)_x = \frac{(g')_x}{(g'')_x} \in G_x,$$

insbesondere ist

$(m_h)_x G_x = h(G_x) \subseteq \mathcal{O}_x$, also $(m_h)_x \in \mathcal{O}_x : G_x$ und

$h = h_{(m_h)_x}$.

(3) Falls $\mathcal{O}_x \cap G_x$ wenigstens einen Nichtnullteiler $(f)_x$ enthält, ist die Zuordnung

$$\mathcal{O}_x : G_x \ni (m)_x \to h_{(m)_x} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(G_x,\mathcal{O}_x)$$

nicht nur, wie in (2) gezeigt wurde, surjektiv sondern auch injektiv:

Sei $h_{(m)_x}$ der Nullhomomorphismus

$\Rightarrow \ (f)_x(m)_x = h_{(m)_x}((f)_x) = 0$

$\Rightarrow \ (m)_x = 0.$

Wir fassen das Ergebnis unserer Bemerkungen im nächsten Punkt nochmals zusammen:

• 3.4. Lemma

Vor.: Sei X ein komplexer Raum und
sei G eine kohärente analytische Modulgarbe von meromorphen Funktionskeimen auf X.
Für jedes $x \in X$ enthalte $G_x \cap \mathcal{O}_x$ mindestens einen Nichtnullteiler.

Beh.: $\mathcal{O} : G = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(G,\mathcal{O})$ ist kohärent.

Beweis:

Nach 3.2. und 3.3. ist

$(\mathcal{O} : G)_x = \mathcal{O}_x : G_x \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_x}(G_x,\mathcal{O}_x) \quad \forall\, x \in X$

Da G eine kohärente Garbe von $\mathcal{O}$-Moduln ist, gilt:

$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_x}(G_x,\mathcal{O}_x) = (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(G,\mathcal{O}))_x \quad \forall\, x \in X$

Nach der Konstruktion in 3.3. ist auch klar, daß nun durch die halmweisen Isomorphismen $(\mathcal{O} : G)_x \to (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(G,\mathcal{O}))_x$ Schnitte in Schnitte übergeführt werden.

Zusammen: $\mathcal{O} : G \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(G,\mathcal{O})$

Da G und $\mathcal{O}$ kohärente Garben von $\mathcal{O}$-Moduln sind, zeigen die Erhaltungssätze der Kohärenz, daß $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(G,\mathcal{O})$ kohärent ist.

4. Ein Dimensionssatz

Sei X ein komplexer Raum mit der Singularitätenmenge $S := X^{x}$.
$x \in S$ sei ein *normaler* Punkt aus X.

4.0. Vorbemerkung

Sei N eine rein 1-codimensionale analytische Menge in X, die x enthält und dort irreduzibel ist. Beim Offenheitsbeweis für die Menge der normalen Punkte von X wird sich ein Hilfssatz folgender Form als nützlich erweisen:

> Eine in N holomorphe Funktion ist aus Stetigkeitsgründen in einer Umgebung von x bereits vollständig bestimmt, wenn man sie auf *den* Punkten der Umgebung kennt, die bzgl. X (!) gewöhnlich sind.

Zu diesem Zweck zeigen wir hier, daß $(N \cap U_1)\setminus S$ dicht liegt in $N \cap U_1$ für eine Umgebung U_1 von x in X.

4.1. Bemerkung

Sei N wie oben gewählt.
Wir zeigen hier, daß sich die oben geforderte Dichtheitseigenschaft aus einer in x lokalen Bedingung an die Dimension von S folgern läßt, in welcher N nicht mehr auftaucht.
a) Angabe einer von N unabhängigen hinreichenden Bedingung.

$\overline{(N \cap U_1)\setminus S} = N \cap U_1$ für eine Umgebung U_1 von x

$\iff$ $\overline{(N \cap U_1)\setminus S} = N \cap U_1$ *irreduzibel*, für eine Umgebung U_1 von x

[Da N nach Voraussetzung in x irreduzibel ist, kann man U_1 so verkleinern, daß $N \cap U_1$ irreduzibel ist.
Dann gilt immer noch $\overline{(N \cap U_1)\setminus S} = N \cap U_1$,
denn für V offen in U_1 gilt natürlich:
$S \cap (N \cap U_1)$ nirgends dicht in $N \cap U_1$
$\Rightarrow S \cap (N \cap V)$ nirgends dicht in $N \cap V$.
]

$\iff$ $\dim N \cap U_1 \cap S < \dim N \cap U_1$ für eine Umgebung U_1 von x

[Beide Seiten der Äquivalenz folgen, wenn man beachtet, daß S eine in X *analytische* Menge ist, sofort mit folgendem Schluß:
$N \cap U_1$ irreduzibel
$N \cap U_1 \cap S$ analytische Untermenge mit $N \cap U_1 \cap S \neq N \cap U_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dim (N \cap U_1 \cap S) < \dim (N \cap U_1) \quad \text{und} \\ \overline{(N \cap U_1)\setminus S} \;\; (= \overline{(N \cap U_1)\setminus(N \cap U_1 \cap S)}\,) = N \cap U_1 \end{cases}$$

(vgl. [WH] Chap. 5 Sec. 3, (R) S. 148 bzw. Chap. 3 Sec. 1 Theorem 1J S. 76)
]

$\Longleftrightarrow$ $\dim_y (N \cap S) < \dim_y N \cap U_1 \quad \forall\, y \in N \cap U_1 \cap S$ für eine Umgebung U_1 von x

$$\left[\text{"}\Rightarrow\text{"}\quad \dim_y N \cap S \underset{\text{Def.}}{\leq} \max_{y' \in N \cap U_1 \cap S} \dim_{y'} (N \cap S) \right.$$

$$= \dim N \cap U_1 \cap S$$

$$< \dim N \cap U_1$$

$$= \dim_y N \cap U_1$$

da $N \cap U_1$ irreduzibel gewählt werden kann.

"$\Leftarrow$" ebenso

$\Longleftrightarrow$ $\dim_y (N \cap S) \leq \dim_y X - 2 \quad \forall\, y \in N \cap U_1 \cap S$ für eine Umgebung U_1 von x

[Da N rein 1-codimensional,
ist $\dim_y (N \cap U_1) = \dim_y N = \dim_y X - 1 \quad \forall\, y \in N \cap U_1$

Hierzu genügt es offenbar zu fordern:

$$\dim_y S \leq \dim_y X - 2 \quad \forall\, y \in U_1 \cap S \text{ für eine Umgebung } U_1 \text{ von } x.$$

Wir werden mit b) und 4.2. sehen, daß diese Bedingung erfüllbar ist.

b) Umformung in eine unmittelbar an x gestellte Dimensionsbedingung

$\dim_y S \leq \dim_y X - 2 \quad \forall\, y \in U \cap S$ für eine Umgebung U von x

[Man kann U so verkleinern, daß $\dim_x X = \dim_y X \quad \forall\, y \in U$,
denn: x normaler Punkt von X

$\underset{1.6.}{\Rightarrow}$ X_x irreduzibel

$\Rightarrow$ X_x reindimensional

[KA] (6.5), S. 62 oder
[WH] Chap. 3 Sec. 8 Lemma 8I, S. 97

$\Rightarrow$ $\dim_x X = \dim_y X \quad \forall\, y \in U$, falls U klein genug

$\Longleftrightarrow$ $\dim_y S \leq \dim_x X - 2 \quad \forall\, y \in U \cap S$ für eine (reindimensionale) Umgebung U von x

[Auch die Dimensionsforderung an S kann man für genügend kleines U zu x zurücknehmen, denn nach Definition der Dimension (vgl. [KR], Definition auf S. 108) gilt:

$$\exists\, U \text{ Umgebung von } x \text{ mit } \dim_y S \leq \dim_x S \quad \forall\, y \in S \cap U$$

$\Longleftrightarrow$ $\dim_x S \leq \dim_x X - 2$

Der Beweis, daß $\dim_x S \leq \dim_x X - 2$ für den normalen Punkt x gilt, ist das Ziel des nächsten Satzes. Diese Dimensionsbeziehung wird von entscheidender technischer

Bedeutung werden beim KUHLMANN'schen Offenheitsbeweis für die Menge der normalen Punkte: Zusammen mit obigen Bemerkungen wird es gerade diese Beziehung sein, die es erlaubt rein punktuale Ergebnisse in eine Umgebung von x hinauszutragen.

• 4.2. Satz

Beh.: $\dim_x S \leq \dim_x X - 2$ für den normalen Punkt $x \in S$

Beweis:

(1) Bekanntlich ist S analytisch und nirgends dicht in X.
(siehe etwa [KA] (6.12), S. 67)

Wir zerlegen S lokal nach 1.1.:

$\exists$ U offene, reindimensionale Umgebung von x in X

[Man geht wie eben in 4.1.b) vor:

$$x \text{ normal} \underset{1.6.}{\Rightarrow} X_x \text{ irreduzibel}$$

$$\underset{\text{[KA] (6.5), S. 62}}{\Rightarrow} \exists\, U \text{ Umgebung von } x, \text{ so daß } \dim_y X = \dim_x X \quad \forall\, y \in U$$

]

Nach 1.1. kann man U so verkleinern, daß

$S \cap U = \bigcup_{i=1}^{r} S_i$ mit endlichem r, wobei

S_i irreduzibel und
irreduzibel in x $\forall\, i = 1,\dots,r$

Um den Satz zu beweisen, genügt es zu zeigen,

daß $\dim_x S_i \leq \dim_x X - 2 \quad \forall\, i = 1,\dots,r$

Da S_i nur singuläre Punkte enthält, gilt sicher

$\dim_x S_i \leq \dim_x X - 1 \quad \forall\, i = 1,\dots,r$

(vgl. [KA] (6.12), S. 67)

Bleibt also zu zeigen,

daß $\dim_x S_i \neq \dim_x X - 1 \quad \forall\, i = 1,\dots,r$

(2) A: $\exists$ i mit $\dim_x S_i = \dim_x X - 1$; Sei o.B.d.A. i = 1

Beweisidee:

Es liegt nahe zu zeigen, daß S_1 bei so kleiner Kodimension noch (viele) gewöhnliche Punkte von U enthalten muß; das steht im Widerspruch zu $S_1 \subseteq S$.

Sehen wir, was die unmögliche Forderung bedeutet, daß ein Punkt $y \in S_1$ gewöhnlich bzgl. X ist:

a) Wir wenden ein bekanntes Kriterium an.

Da die Forderung lokal ist, nehmen wir im Augenblick einmal an, daß
U eine analytische Menge eines Gebietes G im $\mathbb{C}^n$
ist.

Der $\mathbb{C}^n$ sei mit einem $(x_1,\dots,x_n)$-Koordinatensystem versehen.
${}_G I_U$ bezeichne die zu U in G gehörige Idealgarbe der auf U verschwindenden holomorphen Funktionskeime.
Da zu analytischen Mengen gehörige Idealgarben kohärent sind, ist ${}_G I_U$ kohärent, also endlich erzeugt über ${}_G\mathcal{O}$; daraus folgt

$$\exists\, V = \overset{\circ}{V}(y) \subseteq G \quad \exists\, u_1,\dots,u_t \in {}_G I_U(V) \text{ mit:}$$
$$({}_G I_U)_{y'} = \sum_{i=1}^{t} {}_G\mathcal{O}_{y'}\,(u_i)_{y'} \qquad \forall\, y' \in V.$$

Nun gilt (vgl. [KA] (6.11), S. 65)

y gewöhnlicher Punkt von U

$$\Longleftrightarrow \operatorname{Rang}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big|_y\right)_{\substack{i=1,\dots,t\\ j=1,\dots,n}} \geq n - \dim_y X$$
$$= n - \dim_x X$$

Wahl von U in (1)

$$\underset{A}{=} n - \dim_x S_1 - 1$$
$$= n - \dim_y S_1 - 1$$

S_1 irreduzibel und
[WH] Chap. 3 Sec. 1 Theorem 1I, S. 76

$$\Longleftrightarrow \operatorname{Rang}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big|_y\right)_{\substack{i=1,\dots,t\\ j=1,\dots,n}} + 1 \geq n - \dim_y S_1 \qquad (*)$$

b) Nimmt man nun weiterhin an, daß man y sogar gewöhnlich bzgl. S_1 finden kann, dann ist auch $n - \dim_y S_1 = \operatorname{codim}_y S_1$ für ein Erzeugendensystem $v_1,\dots,v_q \in {}_G I_{S_1}(V)$, welches ${}_G I_{S_1}$ über einer V enthaltenden offenen Umgebung V_1 von y erzeugt, (wieder nach [KA] (6.11), S. 65) als Funktionaldeterminante schreibbar:

$$\text{y gewöhnlicher Punkt von } S_1 \Longleftrightarrow n - \dim_y S_1 = \operatorname{Rang}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\Big|_y\right)_{\substack{k=1,\dots,q\\ j=1,\dots,n}}$$

Da S_1 analytische Untermenge von X ist, kann man zu den v_k die u_j dazunehmen (dann braucht man evtl. weniger v_k's).

Zusammen:

Ist y gewöhnlich bzgl. S_1, dann gilt

$$\text{y gewöhnlich bzgl. U} \Longleftrightarrow \operatorname{Rang}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big|_y\right) + 1 \geq \operatorname{Rang}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big|_y, \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\Big|_y\right)$$

c) Wir werden im folgenden zeigen (und damit ist wenigstens obige Rangbedingung erfüllt):

> Man kann ein $v_k = u_0$ so bestimmen, daß es genügt zu den u_i dieses *eine* u_0 dazuzunehmen, um ein Erzeugendensystem für ${}_G I_{S_1}$ über einem V_1 zu erhalten.

Sehen wir uns daher gleich noch an, wie man v_k's bestimmen kann, wenn man ein Erzeugendensystem von u_i's für ${}_G I_U$ über V bereits hat.

Sei dazu $y' \in V \cap U$.

Zunächst gilt: $(f)_{y'} \in ({}_G I_{S_1})_{y'} \iff (f|U)_{y'} \in ({}_U I_{S_1})_{y'}$

$$\lceil (f)_{y'} \in ({}_G I_{S_1})_{y'} \iff f|S_1 \cap W = 0 \text{ für ein } W = \overset{\circ}{W}(y') \subseteq G$$

$$\iff (f|U)|S_1 \cap W' = 0 \text{ für ein } W' = \overset{\circ}{W}'(y') \subseteq U$$

$$\iff (f|U)_{y'} \in ({}_U I_{S_1})_{y'}$$

$\lfloor$

Daraus folgt sofort

$$({}_G I_{S_1})_{y'} = \sum_{i=1}^{t} (u_i)_{y'}\, {}_G\mathcal{O}_{y'} + \sum_{k=1}^{q} (v_k)_{y'}\, {}_G\mathcal{O}_{y'}$$

$$\iff ({}_U I_{S_1})_{y'} = \sum_{k=1}^{q} (v_k|U)_{y'}\, {}_U\mathcal{O}_{y'}$$

$\lceil$"$\Leftarrow$" $(f)_{y'} \in ({}_G I_{S_1})_{y'}$

$$\iff (f|U)_{y'} \in ({}_U I_{S_1})_{y'} = \sum_{k=1}^{q} (v_k|U)_{y'}\, \underbrace{{}_U\mathcal{O}_{y'}}_{= {}_G\mathcal{O}_{y'}/({}_G I_U)_{y'}}$$

$$\iff (f)_{y'} \in \underbrace{({}_G I_U)_{y'}}_{= \sum_{i=1}^{t} (u_i)_{y'}\, {}_G\mathcal{O}_{y'}} + \sum_{k=1}^{q} (v_k)_{y'}\, {}_G\mathcal{O}_{y'}$$

"$\Rightarrow$" $(f|U)_{y'} \in ({}_U I_{S_1})_{y'}$

$$\iff (f)_{y'} \in ({}_G I_{S_1})_{y'} = \underbrace{\sum_{i=1}^{t} (u_i)_{y'}\, {}_G\mathcal{O}_{y'}}_{= ({}_G I_U)_{y'}} + \sum_{k=1}^{q} (v_k)_{y'}\, {}_G\mathcal{O}_{y'}$$

$$\iff (f|U)_{y'} \in \sum_{k=1}^{q} (v_k|U)_{y'} \cdot \underbrace{{}_G\mathcal{O}_{y'}/({}_G I_U)_{y'}}_{= {}_U\mathcal{O}_{y'}}$$

$\lfloor$

Daher bedeutet, daß man *ein* u_0 wie oben finden kann, gerade:

> Es existiert eine offene Umgebung V_1' von y in U, so daß gilt:
> ${}_U I_{S_1}$ besitzt über V_1' ein einelementiges Erzeugendensystem.

Dieses Ergebnis wird uns in (3) der Hauptidealsatz 9.4.4. des algebraischen Anhangs unschwer liefern.

Da die Frage nach einem Erzeugendensystem für ${}_U I_{S_1}$ über V_1' unabhängig von G allein in X gestellt werden kann, wollen wir G vorläufig wieder vergessen und $I_{S_1} := {}_X I_{S_1}$ über X untersuchen.

(3) Es bezeichne nun I_{S_1} die zu S_1 gehörige Idealgarbe der auf S_1 verschwindenden holomorphen Funktionskeime.

(3.0) (Beh.): $(I_{S_1})_x$ ist ein *minimales* Primideal in $\mathcal{O}_x$

Bemerkung: Die Minimalität ist wegen unserer Widerspruchsannahme sofort klar, wenn man vom idealtheoretischen Dimensionsbegriff 9.8.1 ausgeht. Wir wollen diese Aussage jedoch kurz mit dem analytischen Dimensionsbegriff zeigen:

S_1 irreduzibel in x $\Rightarrow$ $(I_{S_1})_x$ Primideal in $\mathcal{O}_x$

(z.B. [KR] (9.5) S. 79)

Bleibt die Minimalität von $(I_{S_1})_x$ als Primideal in $\mathcal{O}_x$ zu zeigen.

A: $\exists$ p echtes Primideal in $\mathcal{O}_x$ mit $p \subsetneqq (I_{S_1})_x$

$\Rightarrow$ $\exists$ V offene Umgebung von x, $\exists$ Y analytische Menge in V mit:

$(Y)_x$ irreduzibler Keim und $(S_1)_x \subsetneqq (Y)_x \subsetneqq (X)_x$

⌈Sei $(Y)_x := Z(p)$.

Dann existiert nach dem Einbettungssatz von REMMERT - STEIN (siehe etwa [KR] (10.5) S. 86) ein V und Y wie behauptet.

Die Irreduzibilität von $(Y)_x$ folgt natürlich so:

p Primideal $\Rightarrow I((Y)_x) = I(Z(p)) = p$ Primideal

HILBERT's Nullstellensatz (z.B. [KR], Bem. zu (12.1) S. 99)

$\Rightarrow (Y)_x$ irreduzibel

⌊

$\Rightarrow \dim_x S_1 < \dim_x Y < \dim_x X$

[WH] Chap. 3 Sec. 8 Lemma 8J, S. 97 oder
[GU] §3 d) Theorem 9(a), S. 53

$\Rightarrow \dim_x S_1 \leq \dim_x X - 2$ ✗✗ (Wir hatten $\dim_x S_1 = \dim_x X - 1$ vorausgesetzt.)

(3.1) (Beh.): $\exists\, U_1 = \mathring{U}_1(x) \subseteq U \quad \exists\, \sigma_1,\ldots,\sigma_m \in I_{S_1}(U_1)$ mit

$$(I_{S_1})_y = \sum_{i=1}^{m} {}_X\mathcal{O}_y\,(\sigma_i)_y \quad \forall\, y \in U_1$$

S_1 ist nach Definition in (1) analytisch.
Da zu analytischen Mengen gehörige Idealgarben kohärent sind, ist I_{S_1} kohärent, also endlich erzeugt über $\mathcal{O}$; daraus folgt sofort die Behauptung.

(3.2) Wir werden nun die σ_i mit einem algebraischen Trick zusammenfassen:
Dazu gehen wir in den Stellenring $\dfrac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{O}_x\setminus(I_{S_1})_x}$.

$\mathcal{O}_x$ NOETHER'sch

x normal $\begin{cases} \overset{\Rightarrow}{1.6.} & \mathcal{O}_x \text{ Integritätsbereich} \\ \overset{\Rightarrow}{1.13.} & \mathcal{O}_x \text{ ganz-abgeschlossen in Quot } (\mathcal{O}_x) \end{cases}$

(3.0) $\Rightarrow$ $(I_{S_1})_x$ minimales Primideal in $\mathcal{O}_x$

$\Rightarrow \dfrac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{O}_x\setminus(I_{S_1})_x} \cdot (I_{S_1})_x$ ist ein Hauptideal

$\mathcal{G}$.4.4. zusammen mit $\mathcal{G}$.3.2.

$$\Rightarrow \exists\, \sigma_x \in (I_{S_1})_x \;:\; \frac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{O}_x\setminus(I_{S_1})_x} \cdot (I_{S_1})_x = \frac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{O}_x\setminus(I_{S_1})_x}\,\sigma_x$$

Nach Definition der σ_i in (3.1) ist $(\sigma_i)_x \in (I_{S_1})_x \subseteq \dfrac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{O}_x\setminus(I_{S_1})_x}\,(I_{S_1})_x \;\forall\, i$

$$\Rightarrow \underset{\sim\sim\sim\sim}{\exists\, \sigma_x \in (I_{S_1})_x} \;:\; (\sigma_i)_x \in \frac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{O}_x\setminus(I_{S_1})_x}\,\sigma_x$$

Nun erhalten wir die gewünschte Darstellung der in (3.1) definierten σ_i:

$$(\sigma_i)_x = \frac{\gamma_i}{\beta_i}\,\sigma_x \text{ mit } \beta_i, \gamma_i \in \mathcal{O}_x,\ \beta_i \notin (I_{S_1})_x$$

also

$$\beta_i(\sigma_i)_x = \gamma_i\sigma_x\,,\quad \beta_i \notin (I_{S_1})_x \quad \text{mit } \beta_i,\gamma_i \in \mathcal{O}_x.$$

Sei nun $U_2 = \mathring{U}_2(x) \subseteq U_1$ und $\sigma \in \mathcal{O}(U_2)$ so gewählt, daß $\underset{\sim}{\sigma_x = (\sigma)_x}$.
Dann gilt weiter:

$$\exists\, U_3 = \mathring{U}_3(x) \subseteq U_2 \;:\; \underline{b_i\sigma_i = c_i\sigma\,,\ (b_i)_x \notin (I_{S_1})_x \text{ mit } b_i,c_i \in \mathcal{O}(U_3)}$$

(3.3) Nun kann aber σ nur in U_3 und nur dort, wo alle b_i ungleich 0 sind, die σ_i ersetzen:

Auf $U_3 \setminus B$ gilt: $\sigma_i = \frac{c_i}{b_i}\sigma \quad \forall\, i=1,\dots,m$, wobei $B := \bigcup_{i=1}^{m} \{y \in U_3 | b_i(y) \neq 0\}$.

Nach (3.1) ist $(I_{S_1})_y = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{O}_y(\sigma_i)_y \quad \forall\, y \in U_1$

Auf $U_3 \setminus B$ kann man schreiben

$$\sum_{i=1}^{m} \mathcal{O}_y(\sigma_i)_y = \Big(\sum_{i=1}^{m} (\tfrac{c_i}{b_i})_y \mathcal{O}_y\Big)(\sigma)_y \subseteq \mathcal{O}_y \cdot (\sigma)_y$$

Andererseits ist nach Konstruktion in (3.2)

$(\sigma)_x = \sigma_x \in (I_{S_1})_x = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{O}_x(\sigma_i)_x$ und daher U_3 so klein wählbar, daß

$\sigma = \sum_{i=1}^{m} a_i\sigma_i$ mit $a_i \in \mathcal{O}(U_3)$ in U_3 gilt und somit

$$\mathcal{O}_y \cdot (\sigma)_y = \mathcal{O}_y \cdot \sum_{i=1}^{m} (a_i)_y(\sigma_i)_y \subseteq \sum_{i=1}^{m} \mathcal{O}_y(\sigma_i)_y \quad \forall\, y \in U_3$$

Zusammen:

$$(I_{S_1})_y = {}_X\mathcal{O}_y \cdot (\sigma)_y \quad \forall\, y \in U_3 \setminus B$$

Mit anderen Worten:

σ erzeugt in $V_1' := U_3 \setminus B$ die zu S_1 gehörige Idealgarbe I_{S_1}

(3.4) Wir können sicherstellen, daß $S_1 \cap (U_3 \setminus B) \neq \emptyset$
(Das wird einen Widerspruch zu (4) ergeben):

$$(b_i)_x \notin (I_{S_1})_x \quad \forall\, i=1,\dots,m$$

$$\overset{(3.2)}{\Longleftrightarrow} \prod_{i=1}^{m} (b_i)_x \notin (I_{S_1})_x$$

$(I_{S_1})_x$ prim

$$\Longleftrightarrow S_1 \cap V \not\subseteq b^{-1}(o) \quad \forall\, V = \mathring{V}(x) \subseteq U_3, \quad \text{wobei } b := \prod_{i=1}^{m} b_i$$

$$\Longleftrightarrow S_1 \cap V \not\subseteq B \quad \forall\, V = \mathring{V}(x) \subseteq U_3$$

[Beachte: $b^{-1}(o) = \{y \in U_3 \mid \prod_{i=1}^{m} b_i(y) = 0\}$

$= \{y \in U_3 \mid b_i(y) = 0 \text{ für ein } i\}$

$= \bigcup_{i=1}^{m} b_i^{-1}(o)$

$= B$]

$\Longleftrightarrow\ S_1 \cap (V\setminus B) \neq \emptyset \quad \forall\ V = \overset{\circ}{V}(x) \subseteq U_3$

Insbesondere ist $S_1 \cap (U_3\setminus B) \neq \emptyset$

(4) Sei S' die Menge der bzgl. S_1 singulären Punkte.
Dann ist (Begründung wie in (1)!) S' nirgends dicht (und analytisch) in S_1.
Also gilt nach (3.4)

$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{(S_1\setminus S') \cap (U_3\setminus B) \neq \emptyset}$

Wir werden nun aber in (5) - mit der in (2) gegebenen Idee - mit Hilfe von (3.2) zeigen, daß alle Punkte $y \in (S_1\setminus S') \cap (U_3\setminus B)$ (d.h. Punkte $y \in S_1 \cap U_3$, in welchen S_1 gewöhnlich ist und $b_i(y) \neq 0\ \forall\ i$) gewöhnlich bzgl. X sein müssen.
Da diese Punkte aber nach Definition von S_1 singulär bzgl. X sein müssen, ist dann

$(S_1\setminus S') \cap (U_3\setminus B) = \emptyset$ ⚡

(5) (Beh.): $\forall\ y \in (S_1\setminus S') \cap (U_3\setminus B)$: y gewöhnlich bzgl. X

(5.1) Da die Behauptung lokal ist, kann man o.B.d.A. annehmen:

U_3 ist analytische Menge eines Gebietes G in $\mathbb{C}^n$.

Der $\mathbb{C}^n$ sei mit einem $(x_1,\ldots,x_n)$-Koordinatensystem versehen, ${}_G I_{U_3}$ sei die zu U_3 gehörige Idealgarbe.

Da zu analytischen Mengen gehörige Idealgarben kohärent sind, ist ${}_G I_{U_3}$ kohärent, also endlich erzeugt über ${}_G\mathcal{O}$; daraus folgt:

$\exists\ V = \overset{\circ}{V}(y) \subseteq G\ \ \exists\ u_1,\ldots,u_t \in {}_G I_{U_3}(V)$ mit:

$$({}_G I_{U_3})_{y'} = \sum_{i=1}^{t} {}_G\mathcal{O}_{y'}(u_i)_{y'} \quad \forall\ y' \in V$$

Sei $V_1 := V \cap (U_3\setminus B)$ (eine offene Umgebung von y) und

$u_o := \sigma | V_1 \in {}_{U_3}\mathcal{O}(V_1)$

Nun gilt:

$${}_{U_3}\mathcal{O}_{y'} = {}_G\mathcal{O}_{y'} / ({}_G I_{U_3})_{y'} \quad \forall\ y' \in U_3$$

und daher

$(f)_{y'} \in ({}_G I_{S_1 \cap U_3})_{y'}$

$\Longleftrightarrow\ f \mid S_1 \cap U_3 \cap W = 0$ für ein $W = \overset{\circ}{W}(y') \subseteq G$

$$\iff (f|U_3)|S_1 \cap W = 0$$

$$\iff (f|U_3)_{y'} \in ({}_{U_3}I_{S_1})_{y'} \underset{(3.3)}{=} (\sigma)_{y'}\, {}_{U_3}\mathcal{O}_{y'}$$

$$\iff (f)_{y'} \in (\sigma)_{y'}\, {}_{G}\mathcal{O}_{y'} + ({}_{G}I_{U_3})_{y'}$$

$${}_{U_3}\mathcal{O}_{y'} = {}_{G}\mathcal{O}_{y'} \,/\, ({}_{G}I_{U_3})_{y'}$$

$$\iff (f)_{y'} \in (u_o)_{y'}\, {}_{G}\mathcal{O}_{y'} + \sum_{i=1}^{t} {}_{G}\mathcal{O}_{y'}(u_i)_{y'}$$

$$= \sum_{i=o}^{t} (u_i)_{y'}\, {}_{G}\mathcal{O}_{y'}$$

Zusammen:

$$({}_{G}I_{S_1 \cap U_3})_{y'} = \sum_{i=o}^{t} (u_i)_{y'}\, {}_{G}\mathcal{O}_{y'} \quad \forall\, y' \in V_1$$

Also erzeugen $u_o, u_1, \ldots, u_t$ in V_1 die zu $U_3 \cap S_1$ gehörige Idealgarbe ${}_{G}I_{U_3 \cap S_1}$.

(5.2) Nun geht man wie in (2) vor:

y gewöhnlich bzgl. S_1

$$\Rightarrow \text{Rang}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}|y\right)_{\substack{i=o,\ldots,t\\ j=1,\ldots,n}} = n - \dim_y S_1$$

[KA] (6.11), S. 65
wegen (5.1)

$$= n - \dim_x S_1$$

S_1 irreduzibel und
[WH] Chap. 3 Sec. 1 Theorem 1I, S. 76

$$\underset{A}{=} n - \dim_x X + 1$$

$$\Rightarrow \text{Rang}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}|y\right)_{\substack{i=1,\ldots,t\\ j=1,\ldots,n}} \geq n - \dim_x X$$

$$= n - \dim_y X$$

Wahl von U (in (1))

$$\Rightarrow \text{Rang}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}|y\right)_{\substack{i=1,\ldots,t\\ j=1,\ldots,n}} = n - \dim_y X$$

und y ist gewöhnlicher Punkt von x

[KA] (6.11) S. 65

• 4.3. Bemerkung

Satz 4.2. hat (man vergleiche die Vorbemerkung 4.0.) für den KUHLMANN'schen Offenheitsbeweis für die Menge der normalen Punkte von X offenbar nur den Charakter eines kleinen Hilfssatzes. Im GRAUERT - REMMERT'schen Offenheitsbeweis 6.3. ist Satz 4.2. sogar ganz entbehrlich. Dennoch liegt die Dimensionsbeziehung nicht gerade an der Oberfläche, wie die recht diffizile Argumentation oben zeigt. Wir wollen daher noch untersuchen, wie scharf die Aussage ist. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß die im Rest dieses Abschnitts angestellten Überlegungen im Offenheitsbeweis - jedenfalls in der ersten Darstellung von Abschnitt 5. - keine Rolle spielen.

Die vielen äquivalenten Umformungen oben legen die Vermutung nahe, daß nur - in der obigen Notation - bei der Auswertung des algebraischen Satzes 9.4.4. wirklich Substanz der Voraussetzung verloren ging. Tatsächlich gilt:

• 4.4. Satz

Vor.: Sei X ein reindimensionaler komplexer Raum mit der Singularitätenmenge S.
Für den festen Punkt $x \in S$ gelte

$$\dim_x S \leq \dim_x X - 2$$

Beh.: Für jedes 1-codimensionale Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathcal{O}_x$ gilt:
$(\mathcal{O}_x)_{\mathfrak{p}}$ ist ganz-abgeschlossen in seinem totalen Quotientenring.

Beweis:

(0) Vorbemerkung

Da wir keine Voraussetzung darüber haben, ob $\mathcal{O}_x$ Nullteiler enthält oder nicht, benötigen wir hier einen etwas verallgemeinerten Begriff eines Quotientenringes (vgl. 9.1.). Wir werden jedoch als erstes durch geometrische Interpretation der $\mathfrak{p}$ und $(\mathcal{O}_x)_{\mathfrak{p}}$ zeigen, daß man doch o.B.d.A. $\mathcal{O}_x \backslash \mathfrak{p}$ als nullteilerfrei annehmen kann.

(1) (Beh.): o.B.d.A. ist $\mathcal{O}_x \backslash \mathfrak{p}$ nullteilerfrei und
$\mathfrak{p} = (I_N)_x$ für eine rein 1-codimensionale, irreduzible analytische Menge N in X.

(1.1) Interpretation von $(\mathcal{O}_x)_{\mathfrak{p}}$.

Hier wird die Voraussetzung, daß $\mathfrak{p}$ 1-codimensional ist, noch nicht investiert.
Sei $^{-}: \mathcal{O}_x \to (\mathcal{O}_x)_{\mathfrak{p}}$ der kanonische Homomorphismus.

Wir konstruieren zu $\overline{\mathcal{O}_x}$ einen komplexen Raum $\overline{X}$, dessen kanonische (reduzierte) Strukturgarbe gerade $\overline{\mathcal{O}_x}$ ist.

Der Kern des Homomorphismus $^{-}$ ist nach 9.2.4, (5)

$$\bigcap_{q_i \subseteq \mathfrak{p}} q_i \text{ ,}$$

wobei $(0) = \bigcap_{i=1}^{r} q_i$ die LASKER - NOETHER - Zerlegung von (0) ist.

Da X reduziert ist, ist $(0) = \sqrt{(0)} = \bigcap_{i=1}^{r} \sqrt{q_i}$ die LASKER - NOETHER - Zerlegung von (0), also $(0) = \bigcap_{i=1}^{r} p_i$ mit $p_i := q_i$ prim.

Also ist der Kern des Homomorphismus $\overline{}$ gleich $\bigcap_{p_i \subseteq p} p_i$ und damit

$$\overline{\mathcal{O}_x} = \mathcal{O}_x \Big/ \bigcap_{p_i \subseteq p} p_i$$

Wie üblich interpretiert man nun die p_i:

$$(I_X)_x \underset{\text{Def.}}{=} (0) = \bigcap_{i=1}^{r} p_i$$

entspricht eine Zerlegung

$$(X)_x = \bigcup_{i=1}^{r} (X_i)_x$$ von $(X)_x$ in irreduzible Komponenten, d.h.

$$p_i = (I_{X_i})_x \quad \forall\ i=1,\dots,r$$

Nach 1.1. existiert eine offene Umgebung U von x in X, so daß gilt:

Ist $U = U_1 \cup \dots \cup U_r$ eine Zerlegung in irreduzible Komponenten, dann ist $(U_i)_x = (X_i)_x$ irreduzibel.

Sei $\overline{X} := \bigcup_{(I_{U_i})_x \subseteq p} U_i$

Dann gilt für die kanonische komplexe Strukturgarbe $\overline{\mathcal{O}}$ von $\overline{X}$:

$$\overline{\mathcal{O}} = {}_X\mathcal{O}|U \,/\, I_{\overline{X}} = {}_X\mathcal{O}|U \Big/ \bigcap_{(I_{U_i})_x \subseteq p} I_{U_i} \text{ , also}$$

$$(\overline{\mathcal{O}})_x = \mathcal{O}_x \Big/ \bigcap_{(I_{U_i})_x \subseteq p} (I_{U_i})_x = \mathcal{O}_x \Big/ \bigcap_{p_i \subseteq p} p_i = \overline{\mathcal{O}_x}$$

(1.2) Interpretation von $\overline{p}$ in $\overline{X}$.

Sei $N_x := Z(p)$ das Nullstellengebilde von p

Nach dem Einbettungssatz von REMMERT und STEIN ([KR] (10.5), (1) S. 86) existiert eine Umgebung V von x in X und eine in V analytische Menge N' mit $(N')_x = N_x$

Da $\mathfrak{p}$ prim, also $N_x = Z(\mathfrak{p})$ irreduzibel, kann man (man vergleiche wieder 1.1.) U in (1.1) so wählen, daß zusätzlich

gilt: $U \subseteq V$ und

$$N := U \cap N' \text{ irreduzibel}$$

Nach dem HILBERT'schen Nullstellensatz für Primideale ist

$$\mathfrak{p} = I(Z(\mathfrak{p})) = I(N_x) = I((N)_x) = (I_N)_x.$$

Also gilt: $\exists$ N in U irreduzible analytische Menge mit $\mathfrak{p} = (I_N)_x$.

N ist rein 1-codimenisonal.

(Nach Voraussetzung ist nämlich $\operatorname{codim}(N)_x = \operatorname{codim} Z(\mathfrak{p}) = 1$.
Da X reindimensional und N als irreduzible analytische Menge reindimensional sind, folgt daraus, daß N rein 1-codimensional ist.)

$N \subseteq \overline{X}$

⌈N irreduzibel in U

$\Rightarrow N \subseteq U_i$ für ein i mit $(N)_x \subseteq (U_i)_x$

[WH] Chap. 3 Sec. 1 Theorem 1E, S. 74

$$\Rightarrow N \subseteq \bigcup_{(N)_x \subseteq (U_i)_x} U_i = \bigcup_{(I_{U_i})_x \subseteq \mathfrak{p}} U_i = \overline{X}$$

⌊

Für die Idealgarbe ${}_{\overline{X}}I_N$ von N in $\overline{X}$ gilt:

$${}_{\overline{X}}I_N = I_N / I_{\overline{X}} = I_N / \bigcap_{(I_{U_i})_x \subseteq \mathfrak{p}} I_{U_i}, \quad \text{also}$$

das ist dieselbe Überlegung
wie auf S. 58
(da Idealgarben endlich erzeugt sind)

$$({}_{\overline{X}}I_N)_x = (I_N)_x \Big/ \bigcap_{(I_{U_i})_x \subseteq \mathfrak{p}} (I_{U_i})_x = \mathfrak{p} \Big/ \bigcap_{\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p}_i = \overline{\mathfrak{p}}.$$

(1.3) Es genügt, die Behauptung für $\overline{X}$ anstelle von X nachzuweisen, denn nach Konstruktion ist $((\overline{\mathcal{O}})_x)_{\mathfrak{p}} = (\overline{\mathcal{O}_x})_{\overline{\mathfrak{p}}} = (\mathcal{O}_x)_{\mathfrak{p}}$.

$\overline{X}$ erfüllt dieselben Voraussetzungen wie X:

$\overline{X}$ ist natürlich als Vereinigung irreduzibler Komponenten des reindimensionalen Raumes X reindimensional (vgl. [WH] Chap. 3 Sec. 2 Theorem 2D, S. 77).

Da die Singularitätenmenge $\overline{S}$ von $\overline{X} = \bigcup_{(I_{U_i})_x \subseteq \mathfrak{p}} U_i$ in S liegt, ist auch

$$\dim_x \overline{S} \le \dim_x S \le \dim_x X - 2 = \dim_x \overline{X} - 2$$

da X reindimensional, haben alle Komponenten dieselbe Dimension wie X.

$\overline{p}$ ist ein 1-codimensionales Primideal in $\overline{\mathcal{O}_x}$,

denn: p Primideal in $\mathcal{O}_x$

$\Rightarrow$ $(N)_x = Z(p)$ irreduzibel

$\Rightarrow$ $\overline{p} = ({}_{\overline{X}}I_N)_x$ Primideal in $\overline{\mathcal{O}_x}$.

Da N rein 1-codimensional in X ist und $\overline{X}$ Vereinigung gewisser irreduzibler Komponenten von X, ist N auch rein 1-codimensional in $\overline{X}$ und somit $\overline{p}$ 1-codimensional.

Nach Konstruktion ist $\overline{\mathcal{O}_x \backslash p}$ nullteilerfrei.

$\overline{p} = ({}_{\overline{X}}I_N)_x$ für eine rein 1-codimensionale, irreduzible analytische Menge N in $\overline{X}$

Damit ist die Behauptung unter (1) gezeigt, wenn man für $\overline{X}$ wieder X schreibt.

(2) Seien nun die Annahmen von (1) gemacht.

Wir haben zu beweisen, daß $\frac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{O}_x \backslash p}$ ganz-abgeschlossen in Quot $(\mathcal{O}_x) = M_x$ ist.

Sei also $(a)_x \in M_x$, so daß

$$(a)_x^n + (a_{n-1})_x (a)_x^{n-1} + \dots + (a_o)_x = 0 \text{ mit } (a_i)_x \in \frac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{O}_x \backslash p} \quad \forall\, i. \quad (*)$$

Es ist zu zeigen, daß $(a)_x \in \frac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{O}_x \backslash p}$.

(Beh.): Es genügt zu zeigen: $a \in M(X)$ holomorph auf $X \backslash S \Rightarrow (a)_x \in \frac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{O}_x \backslash p}$.

Die Gleichung (*) gilt in einer gewissen Umgebung von x (o.B.d.A. gleich in ganz X) für Repräsentanten

$$a = \frac{a'}{a''} \text{ mit } a', a'' \in \mathcal{O}(X),\ a'' \text{ Nichtnullteiler,}$$

$$a_i = \frac{a_i'}{a_i''} \text{ mit } a_i', a_i'' \in \mathcal{O}(X),\ a_i'' \text{ Nichtnullteiler, } (a_i'')_x \notin p, \text{ also}$$

$$a^n + \frac{a'_{n-1}}{a''_{n-1}} a^{n-1} + \dots + \frac{a'_o}{a''_o} = 0.$$

Um daraus wieder eine *ganze* Gleichung, aber mit *holomorphen* Koeffizienten zu machen, multiplizieren wir mit $(a''_1 \cdot \ldots \cdot a''_n)^n$ durch und setzen $b := a''_{n-1} \cdot \ldots \cdot a''_o \cdot a$:

$$b^n + \sum_{i=o}^{n-1} \underbrace{a'_i \Big(\prod_{j \neq i} a''_j\Big) \cdot \Big(\prod_j a''_j\Big)^{n-i-1}}_{=:\, b_i} b^i = 0$$

also: $b^n + a'_{n-1}\, b_{n-1}\, b^{n-1} + \ldots + a'_o\, b_o = 0$ mit $(b_i)_x \notin \mathfrak{p}$

Nach 1.13. ist dann $(b)_y \in \mathcal{O}'_y \quad \forall\, y \in X$, also $b \in \mathcal{O}'(X)$.

Dann ist $b \mid X\backslash S$ nach 1.3, (3) holomorph.

Es genügt offenbar, die Behauptung des Satzes für $(b)_x$ anstatt für $(a)_x$ nachzuweisen, denn:

$$(a)_x \in \frac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{O}_x\backslash\mathfrak{p}} \iff (b)_x \in \frac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{O}_x\backslash\mathfrak{p}}$$

⌈"$\Rightarrow$" $(a''_i)_x \in \mathcal{O}_x$, $(a)_x \in \dfrac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{O}_x\backslash\mathfrak{p}}$

$$\Rightarrow (b)_x = (a''_{n-1})_x \cdot \ldots \cdot (a''_o)_x \cdot (a)_x \in \frac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{O}_x\backslash\mathfrak{p}}$$

"$\Leftarrow$" Sei $(b)_x = \dfrac{(b')_x}{(b'')_x}$ mit $b', b'' \in \mathcal{O}(X)$, $(b'')_x \notin \mathfrak{p}$

Dann ist (wegen $(a''_i)_x \notin \mathfrak{p}\ \forall i$) auch $(b'')_x \cdot (a''_{n-1})_x \cdot \ldots \cdot (a''_o)_x \notin \mathfrak{p}$, da $\mathfrak{p}$ prim ist.

Also liegt dann $(a)_x = \dfrac{(b')_x}{(b'')_x \cdot (a''_1)_x \cdot \ldots \cdot (a''_n)_x} \in \dfrac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{O}_x\backslash\mathfrak{p}}$

⌊

Damit ist die Behauptung unter (2) gezeigt, wenn man für b wieder a schreibt.

(3) Wir werden im folgenden zeigen, daß unter den Annahmen in (1) die Aussage in der Behauptung in (2) immer erfüllt ist.
Zu diesem Zweck schreiben wir hier die rechte Seite der erwähnten Aussage in (2) noch etwas um:

$(a)_x \in \dfrac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{O}_x\backslash\mathfrak{p}}$

$\iff (a)_x\, (a'')_x \in \mathcal{O}_x$ für ein $(a'')_x \in \mathcal{O}_x\backslash\mathfrak{p}$

(Man beachte: $\mathcal{O}_x\backslash\mathfrak{p}$ ist nullteilerfrei.)

$\iff (a'')_x \in \mathcal{O}_x\colon ((a)_x\mathcal{O}_x)$ für ein $(a'')_x \in \mathcal{O}_x\backslash\mathfrak{p}$

$\iff (a'')_x \notin (\mathfrak{p}=)(I_N)_x$ für ein $(a'')_x \in (\mathcal{O}_x\colon((a)_x\mathcal{O}_x)) \cap \mathcal{O}_x$

$\iff (a'')_x \notin (I_N)_x$ für ein $a'' \in (\mathcal{O}\colon a)(U) \cap \mathcal{O}(U)$,
für eine Umgebung U von x.

⌈Nach 3.2. ist $\mathcal{O}_x\colon ((a)_x\mathcal{O}_x) = (\mathcal{O}\colon (a\cdot\mathcal{O}))_x$.

(Es ist klar, daß $a\cdot\mathcal{O}$ eine kohärente analytische Modulgarbe von meromorphen Funktionskeimen ist:

Endliche Erzeugtheit: trivial

Relationenendlichkeit: 1. Fall: a Nichtnullteiler. trivial

2. Fall: a Nullteiler
Dann verschwindet a auf einigen irreduziblen Komponenten von U.
In dieser Weise wird das Problem aufgeteilt, wenn man die Definition einer Relationengarbe auswertet.)

Wir schreiben zur Abkürzung $\mathcal{O}_x: (a)_x$ bzw. $\mathcal{O}: a$ für $\mathcal{O}_x: ((a)_x\mathcal{O}_x)$ bzw. $\mathcal{O}: (a\cdot\mathcal{O})$

Wir sind also fertig, wenn wir nachgewiesen haben:

$$\left.\begin{array}{l} a \in \mathcal{M}(X) \text{ holomorph auf } X\setminus S \\ \overline{N\setminus S} = N \end{array}\right\rangle$$

$\Rightarrow$ $\exists$ U Umgebung von x $\exists$ $a'' \in ((\mathcal{O}: a) \cap \mathcal{O})(U)$ mit: $(a'')_x \notin (I_N)_x$

(Die Voraussetzung $\overline{N\setminus S} = N$ erhalten wir natürlich so:

$$\left.\begin{array}{l} \dim_x S \le \dim_x X - 2 < \dim_x X - 1 = \dim_x N \\ N \text{ irreduzibel} \end{array}\right\rangle \overline{N\setminus S} = N$$
)

Das werden wir in (4) zeigen:

(4) (Beh.):
$$\left.\begin{array}{l} a \in \mathcal{M}(X) \text{ holomorph auf } X\setminus S \\ \overline{N\setminus S} = N \end{array}\right\rangle$$

$\Rightarrow$ $\exists$ U Umgebung von x $\exists$ $a'' \in ((\mathcal{O}: a) \cap \mathcal{O})(U)$ mit: $(a'')_x \notin (I_N)_x$

(4.1) (Beh.): $(\mathcal{O}: a) \cap \mathcal{O}$ ist eine kohärente analytische Modulgarbe $\forall\, a \in \mathcal{M}(X)$

Es genügt, die Kohärenz lokal nachzuweisen.

Sei $y \in X$ fest gewählt und

U eine Umgebung von y, so daß $a|U = \frac{a'}{a''}$ mit $a',a'' \in \mathcal{O}(U)$, a" Nichtnullteiler.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}((\mathcal{O}: a) \cap \mathcal{O})_z &= \{\varphi \in \mathcal{O}_z \mid \varphi\cdot(a)_z \in \mathcal{O}_z\} \quad \forall\, z \in U \\ &= \{\varphi \in \mathcal{O}_z \mid \varphi\cdot(a')_z \in (a'')_z\, \mathcal{O}_z\} \\ &= \{\varphi \in \mathcal{O}_z \mid \varphi\cdot(a')_z \in (a'')_z\, \mathcal{O}_z \cap (a')_z\, \mathcal{O}_z\}\end{aligned}$$

$$= \{\varphi \in \mathcal{O}_z \mid \varphi\cdot\alpha = 0 \quad \forall\, \alpha \in (a')_z\mathcal{O}_z \,/\, (a'')_z\mathcal{O}_z \cap (a')_z\mathcal{O}_z\}$$

$$= (\text{Annulator } (a'\cdot\mathcal{O}|U \,/\, a''\cdot\mathcal{O}|U \cap a''\cdot\mathcal{O}|U))_z \quad \forall\, z \in U$$

$$= \text{Kern } (\mathcal{O}_z \to \text{Hom}_{\mathcal{O}_z}(A_z, A_z)),$$

wobei $A := a'\cdot\mathcal{O}|U \,/\, a''\cdot\mathcal{O}|U \cap a'\cdot\mathcal{O}|U$

$$= \text{Kern } (\mathcal{O}_z \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}|U}(A,A)_z)$$

da A als Bild einer kohärenten Garbe kohärent ist.

$$= (\text{Kern } (\mathcal{O}|U \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}|U}(A,A))_z \quad \forall\, z \in U$$

$$\Rightarrow \quad ((\mathcal{O}\colon a) \cap \mathcal{O})|U = \text{Kern } (\underbrace{\mathcal{O}|U}_{\text{kohärent}} \to \underbrace{\mathcal{H}om_{\mathcal{O}|U}(A,A)}_{\text{kohärent}}) \quad \text{kohärent}$$

(4.2) Über ein Erzeugendensystem von $(\mathcal{O}\colon a) \cap \mathcal{O}$ in einer Umgebung von x werden wir nun ein a" mit den gewünschten Eigenschaften finden.

$(\mathcal{O}\colon a) \cap \mathcal{O}$ kohärent

$\Rightarrow \quad \exists$ U Umgebung von x $\quad \exists\, a''_1,\dots,a''_r \in ((\mathcal{O}\colon a) \cap \mathcal{O})(U)$

$$\text{mit } (\mathcal{O}_y\colon (a)_y) \cap \mathcal{O}_y = \sum_{i=1}^{r} (a''_i)_y\, \mathcal{O}_y \quad \forall\, y \in U.$$

Da $(N)_x$ irreduzibel, kann man U so wählen, daß $N \cap U$ irreduzibel ist.

Nun können wir so schließen:

$$Z(a''_1,\dots,a''_r) \subseteq \{y \in U \mid (1)_y \notin \mathcal{O}_y\colon (a)_y\}$$

[(vgl.: [KR] (4.1) S. 29/30)

A: $(1)_y \in \mathcal{O}_y\colon (a)_y$ für ein $y \in Z(a''_1,\dots,a''_r)$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{r} (a''_i)_y\cdot(b_i)_y = 1 \quad \text{für gewisse } b_i \text{ o.B.d.A. aus } \mathcal{O}(U)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{r} a''_i\cdot b_i = 1 \qquad \text{(o.B.d.A. in ganz U)}$$

$\Rightarrow \quad a''_i(y) \neq 0$ für ein i $\quad$ ⨳ $\quad (y \in Z(a''_i))$

$$= \{y \in U \mid (a)_y \notin \mathcal{O}_y\}$$

$a \in \mathcal{O}(X\setminus S)$

$\Rightarrow \quad Z(a''_1,\dots,a''_r) \subseteq S \cap U$

$\overline{(N\setminus S) \cap U}^{\,U} = N \cap U$

$$\Rightarrow \overline{(N\setminus Z(a''_1,\dots,a''_r))\cap U}^{U} = N \cap U$$

$$\overline{(N\setminus Z(a''_1,\dots,a''_r))\cap U} = \overline{N \cap U \setminus \bigcap_{i=1}^{r} a''^{-1}_i(0)} = \bigcup_{i=1}^{r} \overline{(N \cap U)\setminus a''^{-1}_i(0)}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{r} \overline{(N\cap U)\setminus a''^{-1}_i(0)}^{U} = N\cap U$$

$\Rightarrow a''_{i_0} | N\cap U \neq 0$ für ein i_0

$N \cap U$ irreduzibel

$\Rightarrow (a''_{i_0})_x \notin (I_N)_x$ für ein i_0

Setze $a'' := a''_{i_0}$

Da wir die Umkehrung dieses Satzes in 4.2. bewiesen haben, können wir nun folgenden Satz formulieren:

• 4.5. Satz

Vor.: Sei X ein reindimensionaler komplexer Raum mit der Singularitätenmenge S. $x \in S$ sei ein fester Punkt.

Beh.: Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Für jedes 1-codimensionale Primideal p in $\mathcal{O}_x$ gilt:

$(\mathcal{O}_x)_p$ ist ganz-abgeschlossen in seinem totalen Quotientenring.

(ii) $\dim_x S \leq \dim_x X - 2$

Nun wird deutlich, von welcher Natur die Dimensionsaussage in Satz 4.2. ist: Sie liefert das geometrische Äquivalent zur algebraischen Aussage (i) über die "lokale" Normalität des Raumes X.

Eine etwas längere Version des KUHLMANN'schen Offenheitsbeweises in 5.12. zeigt dann auch endgültig, daß diese Dimensionsbeziehung eigentlich die Rolle eines Katalysators zwischen Algebra und Geometrie spielt. So verwundert es auch nicht, daß GRAUERT und REMMERT die Dimensionsbeziehung aus dem Offenheitsbeweis ganz wegschaffen konnten.

• 4.6. Satz (K. OKA)

Es ist zwar leicht, nichtnormale Punkte anzugeben (vgl. 1.4.), jedoch gelingt es nicht ohne weiteres einen singulären Punkt vorzuzeigen, der noch normal ist. Satz 4.4. läßt sich zu einem hierfür brauchbaren Kriterium für normale Punkte ausbauen:

Vor.: Es sei $A \subseteq U \subseteq \mathbb{C}^n$ eine analytische Hyperfläche

(d.h. eine rein (n-1)-dimensionale analytische Menge)

Beh.: Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) A ist normal

(ii) $\dim A^x \leq \dim A - 2$

Beweis:

"(i) $\Rightarrow$ (ii)"

Satz 4.2.

"(ii) $\Rightarrow$ (i)"

Der Beweis dieser Richtung besteht nur noch aus einer Zusammenfassung von Satz 9.10.3. (im wesentlichen: Ungemischtheitssatz von COHEN-MACAULAY) und

Satz 4.4.

mit Hilfe des algebraischen Normalitätskriteriums 9.2.5.

Ausführung:

Sei $x \in A^x$ beliebig; wir betrachten ${}_A\mathcal{O}_x$.

${}_A\mathcal{O}_x$ ist natürlich ein Stellenring und die ganz-abgeschlossene Hülle ${}_A\mathcal{O}'_x$ von ${}_A\mathcal{O}_x$ in seinem totalen Quotientenring ${}_A M_x$ ist nach 1.12. ein NOETHER'scher ${}_A\mathcal{O}_x$-Modul.

Nach 1.9. gibt es einen universellen Nenner $u \in {}_A\mathcal{O}_x$ für ${}_A\mathcal{O}'_x$.

Falls u eine Einheit in ${}_A\mathcal{O}_x$ ist, hat man ${}_A\mathcal{O}'_x = u\,{}_A\mathcal{O}'_x \subseteq {}_A\mathcal{O}_x$, also ist dann x ein normaler Punkt.

Sei nun u eine Nichteinheit in ${}_A\mathcal{O}_x$.

Satz 9.10.3. liefert dann zusammen mit 9.9.2.:

$u \cdot {}_A\mathcal{O}_x$ besitzt nur isolierte, 1-codimensionale Primärkomponenten.

[${}_A\mathcal{O}_x = \mathbb{C}\{z_1,\ldots,z_n\} / I(A_x)$.

Sei $R := \mathbb{C}\{z_1,\ldots,z_n\}$ der Potenzreihenring in n Veränderlichen über $\mathbb{C}$, $\mathfrak{a} = I(A_x)$ das Ideal des Mengenkeimes A_x.

Dann ist natürlich $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ ein Radikalideal in R.

Da A rein 1-codimensional, sind die zu $\mathfrak{a} = I(A_x)$ gehörigen Prim (= Primär-) Komponenten alle minimale Primideale in R; also ist nach der Charakterisierung 9.9.2. der 1. Hauptklasse $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal in R

In dieser Situation liefert 9.10.3. für u:

$u \cdot {}_A\mathcal{O}_x$ besitzt nur isolierte Primärkomponenten.

Nach (ii) ist

$$\dim_x A^x \underset{\text{triv.}}{\leq} \dim A^x \underset{\text{(ii)}}{\leq} \dim A - 2 \underset{\text{A reindimensional}}{=} \dim_x A - 2$$

Also gilt nach Satz 4.4.:

Die Quotientenringe $({}_A\mathcal{O}_x)_p$ sind in ihren totalen Quotientenringen ganz-abgeschlossen für alle zu $u \cdot {}_A\mathcal{O}_x$ gehörigen Primideale p.

In dieser Situation liefert Satz 9.2.5.:

${}_A\mathcal{O}_x$ ist ganz-abgeschlossen in ${}_A\mathcal{M}_x$,

also x normaler Punkt in A.

Bemerkung:

Der hier gegebene Beweis für die Richtung "(ii) ⇒ (i)" ist wesentlich verallgemeinerungsfähig; so lassen sich die Voraussetzungen an A weitgehend aufweichen:

Stellenringe, in denen die Ungemischtheitsaussage für Hauptklassenideale der Beh. von 9.9.7. gilt, heißen COHEN-MACAULAY-Ringe.

Ein komplexer Raum X heißt *perfekt*, wenn die Halme $\mathcal{O}_x$ für alle $x \in X$ COHEN-MACAULAY-Ringe sind.

Man kann nun zunächst beweisen (vgl. [KU2] §3 S. 406):

Ein zusammenhängender, perfekter komplexer Raum ist reindimensional.

Nun läßt sich wie oben zeigen:

Ein zusammenhängender, perfekter komplexer Raum ist bereits normal, wenn die Singularitätenmenge mindestens 2-codimensional ist.

Weitere Verallgemeinerungen hier anzugeben oder gar zu beweisen würde ins uferlose führen; man vergleiche dazu am besten den zitierten KUHLMANN-Artikel.

Es sei nur noch erwähnt, daß man auch weiß, was man im Allgemeinen zu der hier betrachteten Dimensionsbeziehung dazunehmen müßte, um Äquivalenz zur Normalität zu erhalten; da die Formulierung dieser Aussage eine weitere, nicht einfache Definition ("homologische Codimension") erfordern würde und Beweise auf einer ganz anderen Ebene liegen, wollen wir nur zitieren:

[FI] Chap. 2 Appendix, 2.27., Theorem auf S. 120 und

A. MARKOE, Pac. J. of Math. Vol. 52 No. 2, 1974
A Characterization of Normal Analytic Spaces by the Homological Codimension of the Structure Sheaf.
S. 485 - 489

• 4.7. Beispiel

Jeder gewöhnliche Punkt eines komplexen Raumes ist normal, jedoch gilt nicht die Umkehrung,
z.B. ist im $\mathbb{C}^3$ die analytische Hyperfläche $A := \{(z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1^2 - z_2 z_3 = 0\}$
im Nullpunkt normal, aber nicht gewöhnlich.

(Dieses Beispiel ist in der algebraischen Geometrie schon länger bekannt.)

Daß A eine analytische Hyperfläche ist, zeigt sofort 9.9.2.
Die Singularitätenmenge von A ist genau $A^x = \{(0,0,0)\}$
(Beweis: ${}_A\mathcal{O}_0$ ist *nicht* faktoriell, wie die 2-deutige Zerlegung $z_1^2 = z_2 z_3$ in (unzerlegbare) Koordinatenfunktionen zeigt.)

Also ist A eine analytische Hyperfläche und $\dim A^x = 0 = \dim A - 2$, mithin ist A nach dem Satz 4.6. von OKA normal.

In 8.4.4. werden wir noch ein ähnliches Beispiel behandeln.

Ich darf mich an dieser Stelle bei Frau Dr. S. HAYES bedanken für den Hinweis, daß man zum Beweis dieses Beispiels diesen (nichttrivialen) Satz von OKA verwenden muß.

5. Der KUHLMANN'sche Beweis der Offenheit der Menge der normalen Punkte

Wir zeigen hier, daß mit den in 2. konstruierten "punktualen" Normalisierungen komplexer Räume bereits lokale Normalisierungen gegeben sind. Dazu genügt es offenbar einzusehen, daß die Menge der normalen Punkte offen ist:

• 5.1. Satz

Vor.: Sei X ein komplexer Raum

Beh.: Die Menge der normalen Punkte von X ist offen in X.

Der Beweis dieses Satzes nach KUHLMANN ist das Ziel des ganzen Abschnitts. Wir wollen daher einmal gewählte Bezeichnungen im ganzen Abschnitt beibehalten.

Von entscheidender technischer Bedeutung wird hier der Dimensionssatz 4.2. sein.

• 5.2. Vorbemerkung zur Beweisidee

Wir werden zu jedem normalen Punkt x von X eine offene Umgebung $U_2 \subseteq X$ angeben, so daß gilt:

Ist V offen in U_2 und $f \in {}_X\mathcal{O}'(V)$, dann gilt bereits $f \in {}_X\mathcal{O}(V)$.

Dann ist jeder Punkt aus U_2 normal, mithin zu jedem normalen Punkt eine Umgebung mit nur normalen Punkten gefunden.

Dazu bringen wir f mit einem universellen Nenner u, der in einer offenen Menge $U_1 \supseteq U_2$ definiert werden wird, als $u \cdot f$ in $\mathcal{O}(V)$ und zeigen, daß

$u \cdot f \in \Gamma(V, \mathcal{O}|U_1 \cdot u)$ gilt;

dann folgt aus der Nichtnullteilereigenschaft von u sofort, daß

$f \in \mathcal{O}(V)$ ist.

Betrachten wir also die analytische Idealgarbe $\mathcal{O}|U_1 \cdot u$!

Zuvor jedoch:

• 5.3. Bezeichnungstechnische Vorbereitungen

a) $\mathcal{O} := {}_X\mathcal{O}$ sei die Garbe der holomorphen Funktionskeime auf X.

$\mathcal{M} := {}_X\mathcal{M}$ sei die Garbe der meromorphen Funktionskeime auf X.

$S := X^X$ sei die Menge der singulären Punkte von X.

b) Sei $x \in S$ ein normaler Punkt auf X.

(Für normale Punkte, die sogar gewöhnlich sind, ist nichts zu beweisen: Zu jedem gewöhnlichen Punkt existiert ja nach Definition eine ganze Umgebung mit nur gewöhnlichen und damit nach dem schwachen RIEMANN'schen Hebbarkeitssatz normalen Punkten.)

Dann gilt wegen Satz 4.2. zusammen mit 4.1.b)

$\exists$ U offene und reindimensionale Umgebung von x in X mit:

$$\dim_y S \leq \dim_y X - 2 \quad \forall\, y \in S \cap U$$

c) Nach dem Satz 1.9. vom universellen Nenner existiert eine offenen Umgebung U_1 von x in U und ein universeller Nenner $u \in \mathcal{O}(U_1)$ für X in x.
o.B.d.A. sei $(u)_x$ eine Nichteinheit in $\mathcal{O}_x$ (sonst ist Satz 1 bereits klar).
Dann ist natürlich auch die Einschränkung von u auf jede kleinere Umgebung von x als U_1 ein universeller Nenner für X in x.
Nach 1.1. kann man U_1 so klein wählen, daß die Nullstellenmenge $u^{-1}(0)$ in endlich viele irreduzible Komponenten $N_1,\dots,N_r$ zerfällt, die überdies in x irreduzibel sind.

Also gilt:

$\exists$ U_1 offene Umgebung von x in U und

$\exists$ $u \in \mathcal{O}(U_1)$ mit

(1) u Nichtnullteiler in $\mathcal{O}(U_1)$, $(u)_x$ Nichteinheit in $\mathcal{O}_x$

(2) V offen in U_1, f schwach holomorph in V

$\Rightarrow$ $uf \in \mathcal{O}(V)$

(3) Ist $u^{-1}(0) = N_1 \cup \dots \cup N_r$ die Zerlegung von $u^{-1}(0)$ in irreduzible Komponenten, dann ist

N_j irreduzibel in x $\quad \forall\, j = 1,\dots,r$

Um eine anschauliche Vorstellung von der Idealgarbe $\mathcal{O}|U_1 \cdot u$ zu gewinnen, zerlegen wir zunächst $\mathcal{O}_x(u)_x$ in Primärkomponenten. Eine geometrische Interpretation der zu dieser Zerlegung gehörigen Primideale wird sich leicht ergeben. Die geometrische Interpretation der Primärkomponenten werden wir in 5.6. erst durch ein Beispiel vorbereiten.

• 5.4. Zerlegung von $\mathcal{O}_x(u)_x$ in Primärkomponenten

Da x ein normaler Punkt von X ist, liefern 1.6. und 1.13.:

$\mathcal{O}_x$ ist ein ganz-abgeschlossener Integritätsbereich in $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_x) = \mathcal{M}_x$.

Natürlich ist $\mathcal{O}_x$ auch NOETHER'sch.

In diesem Fall gewinnt man rein algebraisch (vgl. $\mathcal{G}$.5.4.) die folgende Aussage über die Primärkomponentenzerlegung von $\mathcal{O}_x(u)_x$:

Die LASKER-NOETHER-Zerlegung von $\mathcal{O}_x(u)_x$ hat die Form

$$\mathcal{O}_x(u)_x = \bigcap_{j=1}^{r_o} p_j^{(nj)} \text{ , wobei}$$

$$p_j = ((t_j)_x \frac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{O}_x \setminus p_j}) \cap \mathcal{O}_x \text{ minimale Primideale sind}$$

($(t_j)_x \in p_j$ ist durch diese Gleichung charakterisiert)

mit den zugehörigen Primäridealen

$$p_j^{(m)} = ((t_j)_x^m \frac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{O}_x \setminus p_j}) \cap \mathcal{O}_x \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

- 5.5. Geometrische Interpretation der p_j

Nach Definition ist $p_j = \sqrt{p_j^{(nj)}}$ und somit

$$\bigcap_{j=1}^{r_o} p_j = \bigcap_{j=1}^{r_o} \sqrt{p_j^{(nj)}} = \sqrt{\bigcap_{j=1}^{r_o} p_j^{(nj)}} = \sqrt{\mathcal{O}_x(u)_x} .$$

Weiter gilt nach dem HILBERT'schen Nullstellensatz

$$\sqrt{(u)_x \mathcal{O}_x} = I(\underbrace{Z((u)_x \mathcal{O}_x)}_{= Z((u)_x) = (u^{-1}(0))_x})$$

$$= I((u^{-1}(0))_x)$$

$$= (I_{u^{-1}(0)})_x$$

Zusammen:

$$(I_{u^{-1}(0)})_x = \bigcap_{j=1}^{r_o} p_j \text{ ist die Zerlegung von } (I_{u^{-1}(0)})_x \text{ in Primkomponenten.}$$

Dann gilt wegen 5.3.c) (3)

$$r_o = r \quad \text{und} \quad p_j = (I_{N_j})_x \quad \forall\, j = 1,\dots,r$$

bei geeigneter Numerierung der p_j.

- 5.6. Beispiel

Wir geben hier eine bequemere algebraische Darstellung und eine daraus folgende geometrische Interpretation der $p_j^{(m)}$ in einem Spezialfall an; wir setzen für einen Augenblick voraus,

daß x ein gewöhnlicher Punkt von X ist, in dem auch N_j gewöhnlich ist. (Man beachte, daß wir die in 5.3.b) gemachte Voraussetzung $x \in S$ nur für U verwendet haben. Wir argumentieren daher vernünftig, wenn wir hier U einfach beliebig wählen.)

(1) Dann kann man X in einer offenen Umgebung von x biholomorph mit einem Gebiet im $\mathbb{C}^n$ identifizieren und dort kann man schließlich N_j biholomorph mit einem Stück eines $\mathbb{C}^{n-1}$ identifizieren (Der Beweis, daß N_j rein 1-codimensional ist, wird in 5.7.(1), Klammer, noch explizit ausgeführt!). Dann ist aber $I_{N_j}(W)$ für alle offenen W in einer kleinen Umgebung von x so als Hauptideal darstellbar:

$$I_{N_j}(W) = {}_X\mathcal{O}(W)\cdot\psi|W \quad \forall\ W = \overset{\circ}{W} \subseteq V, \text{ für ein } \psi \in I_{N_j}(V) \text{ für ein } V = \overset{\circ}{V}(x).$$

Insbesondere gilt: $(I_{N_j})_x = {}_X\mathcal{O}_x\cdot(\psi)_x$ für ein $(\psi)_x \in (I_{N_j})_x$.

Nach 9.1.2, (1) ist dann auch

$$(I_{N_j})_x = ((\psi)_x \frac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{O}_x\setminus p_j}) \cap \mathcal{O}_x \ ;$$

wir können daher annehmen

$$t_j = \psi.$$

Also gilt $(I_{N_j})_x = (t_j)_x\, \mathcal{O}_x$.

Da $(I_{N_j})_x$ ein Primideal ist, ist dann

$$(I_{N_j})_x{}^m = (t_j)_x{}^m\, \mathcal{O}_x$$

ein Primärideal zu $(I_{N_j})_x$

$$\left[\begin{array}{l} f\cdot g \in (I_{N_j})_x{}^m \subseteq (I_{N_j})_x \\ \Rightarrow \ \text{o.B.d.A.}\ \ f \in (I_{N_j})_x = (t_j)_x\, \mathcal{O}_x \\ \Rightarrow \ f^m \in (t_j)_x{}^m\, \mathcal{O}_x = (I_{N_j})_x{}^m \end{array}\right.$$

Dann gilt nach 9.1.2, (1)

$$(t_j)_x{}^m\, \mathcal{O}_x = ((t_j)_x{}^m \frac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{O}_x\setminus p_j}) \cap \mathcal{O}_x \underset{\text{Def.}}{=} p_j^{(m)}$$

Ergebnis:

$$p_j^{(m)} = (t_j)_x{}^m\, \mathcal{O}_x, \text{ wobei}$$

t_j charakterisiert ist durch $(I_{N_j})_x = (t_j)_x\, \mathcal{O}_x$.

(2) Nun ist klar, daß $p_j^{(m)}$ gerade die holomorphen Funktionskeime enthält, deren Repräsentanten auf N_j in x mit mindestens m-ter Ordnung verschwinden.

[Nach den Annahmen über x ist $\mathcal{O}_x$ ein faktorieller Ring.
Also bedeutet Verschwinden in mindestens m-ter Ordnung auf N_j in x für ein $(f)_x \in \mathcal{O}_x$ gerade, daß mindestens m Primfaktoren von $(f)_x$ in $(I_{N_j})_x = (t_j)_x\, \mathcal{O}_x$ enthalten sind und das heißt gerade $(f)_x \in (t_j)_x^m\, \mathcal{O}_x$.]

Wir werden sehen, daß man dieses Resultat für den Fall $x \in S$ verallgemeinern kann, indem man das Verhalten von f mit $(f)_x \in p_j^{(m)}$ auf N_j in einer geeigneten Umgebung von x betrachtet.

(3) Wir werden im folgenden auch eine Verallgemeinerung der in (1) gegebenen Beschreibung von $p_j^{(m)}$ durch ein Hauptideal benötigen. Wir bringen dazu diese Darstellung auf eine Gestalt, die nicht so scharf ist.

Die Idee dieser Umformung ist etwa so zu formulieren:

Um das erzeugende Element des Hauptideals p_j nicht direkt aussprechen zu müssen, kann man schreiben:

$$p_j^{(m)} = \bigcap_{\substack{({}^i t)_x \in \mathcal{O}_x \\ p_j \subseteq ({}^i t)_x \mathcal{O}_x}} ({}^1 t)_x \cdot \ldots \cdot ({}^m t)_x\, \mathcal{O}_x$$

Da im allgemeinen Fall erst Faktoren die Elemente aus $p_j^{(m)}$ in Hauptideale befördern (vgl. die Darstellung in 5.4.), wird man mehr Elemente $({}^i t)_x$ untersuchen:

$$p_j^{(m)} = \bigcap_{\substack{s_i \in \mathrm{Quot}\,\mathcal{O}_x \\ p_j \subseteq s_i \mathcal{O}_x}} (s_1 \cdot \ldots \cdot s_m \mathcal{O}_x) \cap \mathcal{O}_x$$

Die letztere Form läßt sich durch triviales algebraisches Umrechnen rein idealtheoretisch interpretieren:

Sei zur Abkürzung $R := \mathcal{O}_x$ und $p := p_j (\neq R)$.

$$\bigcap_{\substack{s_i \in \mathrm{Quot}R \\ p \subseteq s_i R}} (s_1 \cdot \ldots \cdot s_m R) \cap R$$

$$= \{\rho \in R \mid \rho \in s_1 \cdot \ldots \cdot s_m R \quad \forall\, s_i \in \mathrm{Quot}\, R \quad \text{mit } \underbrace{p \subseteq s_i\, R}_{(\Rightarrow s_i \neq 0)}\}$$

$$\underset{s_i || s_i^{-1}}{=} \{\rho \in R \mid \rho \cdot s_1 \cdot \ldots \cdot s_m \in R \quad \forall \underbrace{s_i \in \mathrm{Quot}\ R\setminus\{0\}}_{\text{man kann auch } s_i=0 \text{ noch zulassen.}} \text{ mit } s_i p \subseteq R\}$$

$$= \{\rho \in R \mid \rho \cdot (\underbrace{\{s \in \mathrm{Quot}\ R \mid sp \subseteq R\}}_{= R:\ p})^m \subseteq R\}$$

$$= \{\rho \in \mathrm{Quot}\ R \mid \rho \cdot (R:p)^m \subseteq R\}$$

⌈"$\supseteq$" Wegen $1 \in R: p$ hat man:

$$\rho \cdot (R:\ p)^m \subseteq R \underset{(\rho \in \mathrm{Quot}\ R)}{\Rightarrow} \rho = \rho \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \in R$$

⌊

$$= R:\ (R:\ p)^m.$$

Also: $p_j^{(m)} = \mathcal{O}_x:\ (\mathcal{O}_x:\ p_j)^m$.

• 5.7. Geometrische Interpretation der $p_j^{(m)}$

(0) Nach 5.4. und 5.5. ist

$$p_j^{(m)} = ((t_j)_x{}^m \frac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{O}_x \setminus (I_{N_j})_x}) \cap \mathcal{O}_x \text{ , wobei}$$

$(t_j)_x \in (I_{N_j})_x$ charakterisiert ist durch $(I_{N_j})_x = ((t_j)_x \cdot \frac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{O}_x \setminus (I_{N_j})_x}) \cap \mathcal{O}_x$

Da wir hier nur N_j für ein festes j betrachten, lassen wir in diesem Punkt bei allen Bezeichnungen den Index j weg; wir schreiben also z.B. N anstatt N_j.

(1) Zunächst stellen wir fest, daß das Verhalten einer in einer Umgebung von x holomorphen Funktion aus Stetigkeitsgründen auf N bereits bestimmt ist, wenn man das Verhalten in allen gewöhnlichen Punkten von N kennt, in denen auch X gewöhnlich ist:

Nach Wahl von U in 5.3.b) gilt wegen 4.1.a):

N\S liegt dicht in N

⌈Es ist nur zu überlegen, daß N rein 1-codimensional und in x irreduzibel ist.

Da $(I_N)_x = p$ ein minimales Primideal ist, hat man (z.B. nach [GU] §4,d) Theorem 14.a) S. 83):

$$\dim_x N = \dim_x X - 1 = \dim_x U - 1.$$

Da nach 5.3.b) bzw. c) U bzw. N reindimensional sind, ist dann
N rein 1-codimensional

$\lfloor$ Daß N in x irreduzibel ist, steht auch in 5.3.c).

Bezeichnet $S_N := N^x$ die Singularitätenmenge von N, so liegt bekanntlich auch

$N \setminus S_N$ dicht in N.

Zusammen: $\overline{N \setminus S \setminus S_N} = N$

Nun sind wir in der Lage, das Ergebnis von 5.6.(2) zu verallgemeinern, indem wir die geometrische Eigenschaft des Verschwindens auf N in höherer Ordnung von x aus in eine Umgebung von x hinaustragen:

(2) Beh.: Für eine in einer Umgebung V von x holomorphen Funktion f gilt:

$(f)_x \in p^{(m)}$ $\iff$ $\exists$ V' offene Umgebung von x in V, so daß f in jedem gewöhnlichen Punkt von $V' \cap N$, in dem auch X gewöhnlich ist, auf N mit mindestens m-ter Ordnung verschwindet.
Sagen wir dafür kurz: f erfüllt [m] in V'.

Beweis:

Es genügt sebstverständlich, die Behauptung für Funktionen $(f)_x \neq (0)_x$ nachzuweisen.

"$\Rightarrow$" $(f)_x \in p^{(m)} = ((t)_x^m \dfrac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{O}_x \setminus (I_N)_x}) \cap \mathcal{O}_x$

$\Rightarrow$ $(f)_x = (t)_x^m \dfrac{(a)_x}{(b)_x}$ mit $(a)_x, (b)_x \in \mathcal{O}_x$, $(b)_x \notin (I_N)_x$

$\Rightarrow$ $\exists$ V' offene Umgebung von x mit $f,t,a,b \in \mathcal{O}(V')$,

$(t)_y \in (I_N)_y$, $(b)_y \notin (I_N)_y$ $\forall\, y \in (V' \cap N) \setminus S_N$,

so daß gilt $bf = t^m a$

[Man wähle zunächst V' so klein, daß

$(t)_y \in (I_N)_y$ $\forall\, y \in V' \cap N$ und $bf = t^m a$ in V' gilt.

Bleibt zu zeigen, daß man V' sogar so klein wählen kann,

daß $(b)_y \notin (I_N)_y$ $\forall\, y \in (V' \cap N) \setminus S_N$.

Nach 5.3.c)(3) ist $(N)_x$ irreduzibel

$\Rightarrow$ Man kann V' so klein wählen, daß $N \cap V'$ irreduzibel.

$\Rightarrow$ $(N \cap V') \setminus S_N$ zusammenhängend

A: $\exists\, y \in (V' \cap N) \setminus S_N$ mit $(b)_y \in (I_N)_y$

$\Rightarrow\ (b)_y \in (I_N)_y \quad \forall\, y \in (V' \cap N)\setminus S_N$, insbesondere für $y = x$

$\underset{(1)}{\Rightarrow}\ (b)_x \in (I_N)_x$

$\lfloor$

$\Rightarrow\ (b)_y(f)_y = (t)_y^{\,m}(a)_y$ mit $(t)_y \in (I_N)_y,\ (b)_y \notin (I_N)_y \quad \forall\, y \in (V' \cap N)\setminus S \setminus S_N$

$\Rightarrow$ f erfüllt [m]

$\lceil$Sei $y \in (V' \cap N)\setminus S\setminus S_N$

$y \notin S \Rightarrow \mathcal{O}_y$ faktorieller Ring

$y \notin S_N \Rightarrow (N)_y$ irreduzibel $\Rightarrow (I_N)_y$ Primideal.

Man zerlege $(b)_y, (f)_y, (t)_y$ und $(a)_y$ in Primfaktoren.

Da $(I_N)_y$ ein Primideal ist, liegt mindestens ein Primfaktor von $(t)_y$ in $(I_N)_y$.

Da $(b)_y \notin (I_N)_y$, kann $(b)_y$ *keine* Primfaktoren aus $(I_N)_y$ enthalten.

Also muß ein in $(I_N)_y$ liegender Primfaktor von $(t)_y$ sicher m-mal in $(f)_y$ aufgehen. Mithin verschwindet f auf N in y mit mindestens

$\lfloor$m-ter Ordnung.

"$\Leftarrow$" f erfüllt [m]

$$\underset{(1)}{\Rightarrow}\ (f)_x \in (I_N)_x = \left((t)_x \frac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{O}_x\setminus(I_N)_x}\right) \cap \mathcal{O}_x$$

$$\Rightarrow\ (f)_x = (t)_x^{\,m_0}\,\frac{(a)_x}{(b)_x} \text{ mit } (a)_x, (b)_x \in \mathcal{O}_x,\ (b)_x \notin (I_N)_x,\ m_0 \in \mathbb{N} \qquad (*)$$

Man kann m_0 so wählen, daß $(a)_x \notin (I_N)_x$

$\lceil$A: Es existiert kein m_0 mit obiger Eigenschaft.

Dann nimmt der Prozess

$$(f)_x \in (I_N)_x \;\Rightarrow\; (f)_x = (t)_x \frac{f_2}{g_2} \quad \text{mit } g_2 \notin (I_N)_x$$

$$\Rightarrow f_2 \in (I_N)_x \;\Rightarrow\; f_2 = (t)_x \frac{f_3}{g_3} \quad \text{mit } g_3 \notin (I_N)_x$$

$$\Rightarrow f_3 \in (I_N)_x \;\Rightarrow\; \dots$$

kein Ende.

Also gilt $(f)_x = (t)_x^{\,m}\,\dfrac{f_{n+1}}{g_2\cdot\ldots\cdot g_{n+1}} \in \mathcal{P}^{(n)} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow (f)_x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} p^{(n)} = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(p\,\frac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{O}_x \setminus (I_N)_x}\right)^n\right) \cap \mathcal{O}_x \underset{\uparrow}{=} ((0)_x)$$

9.4.1.
(Durchschnittsatz
von KRULL)

$\Rightarrow (f)_x = (0)_x$ ⚡

$\Rightarrow$ $\exists$ V' offene Umgebung von x mit $f,t,a,b \in \mathcal{O}(V')$,

$$(a)_y,(b)_y \notin (I_N)_y \quad \forall\, y \in (V' \cap N)\setminus S_N,$$

so daß gilt $bf = t^{m_0}\,a$

[Daß man V' so klein wählen kann, daß

$(a)_y,(b)_y \notin (I_N)_y \quad \forall\, y \in (V' \cap N)\setminus S_N$,

zeigt man wie in "$\Rightarrow$" mit dem Zusammenhangsargument.

$\Rightarrow$ $\exists$ V' Umgebung von x: f erfüllt in V ([m_0] und) *nicht* [m_0+1]

[Es ist nachzuweisen, daß t ([1] und) *nicht* [2] erfüllt für hinreichend kleines V'.

I_N ist als Idealgarbe der analytischen Menge N endlich erzeugt; also kann man V' so wählen, daß

$$(I_N)_y = \sum_{k=1}^{l} \mathcal{O}_y(\sigma_k)_y \quad \forall\, y \in V' \quad \text{mit } \sigma_k \in I_N(V')$$

Würde t [2] erfüllen, dann müßten es auch alle σ_k (o.B.d.A. wieder in V'); denn σ_k ist wie f darstellbar:

Dann enthält $(I_N)_y$ für $y \in (V' \cap N)\setminus S$ nur Funktionen, die auf N in y mit mindestens 2-ter Ordnung verschwinden.

Nach (1) ist $(V' \cap N)\setminus S \setminus S_N \neq \emptyset$.

Aber nach 5.6. existiert zu $y \in (V' \cap N)\setminus S\setminus S_N$ eine Funktion, die in nur *erster* Ordnung auf N in y verschwindet.

Widerspruch !

$\Rightarrow$ $m \le m_0$

$\overset{\text{Def. f}}{\Rightarrow}_{(*)}$ $$(f)_x = (t)_x^m \,\frac{(t)_x^{m_0-m}(a)_x}{(b)_x} \in p^{(m)}$$

Wir führen nun eine Garbe ein, um die Interpretation der $p_j^{(m)}$ in 5.7. geschlossen schreiben zu können. Diese übersichtliche Bezeichnungsweise wird dann schnell die Idee zum Beweis von Satz 5.1. liefern.

• 5.8. Die Garben $N_j^{(m)}$

(1) Sei V offen in X.
Wir sagen "$f \in \mathcal{O}(V)$ verschwindet auf N_j mit mindestens m-ter Ordnung", falls f in jedem Punkt aus $(V \cap N_j)\setminus S\setminus S_{N_j}$ auf N_j mit mindestens m-ter Ordnung verschwindet.

(2) Für $V = \overset{\circ}{V} \subseteq X$ setze man

$N_j^{(m)}(V) := \{f \in {}_X\mathcal{O}(V) \mid f$ verschwindet auf N_j mit mindestens m-ter Ordnung$\}$

$N_j^{(m)}$ bezeichne die durch das Garbendatum

$$\left((N_j(V))_{V=\overset{\circ}{V}\subseteq X},\ (\rho_W^V)_{W \underset{\text{offen}}{\subseteq} V}\right), \text{ wobei}$$

ρ_W^V die natürliche Beschränkungsabbildung von V auf W bezeichnet,

induzierte analytische Modulgarbe.

$N_j^{(m)}$ heißt die Garbe der auf X holomorphen Funktionen, die auf N_j mit mindestens m-ter Ordnung verschwinden.

(3) Für den x-Halm von $N_j^{(m)}$ gilt wegen 5.7.(2):

$$(N_j^{(m)})_x = ((N_j^{(1)})_x)^{(m)}.$$

Für $(N_j^{(1)})_x$ $(= (I_{N_j})_x)$ schreiben wir auch kurz $N_{j,x}$.

• 5.9. Der Beweis von Satz 5.1. unter einer Zusatzvoraussetzung

(1) Vorbemerkung:
Wir wissen nun, daß die LASKER-NOETHER-Zerlegung von $\mathcal{O}_x(u)_x$ die Gestalt hat:

$$\mathcal{O}_x(u)_x = \bigcap_{j=1}^{r} (N_j^{(nj)})_x$$
$$= \left(\bigcap_{j=1}^{r} N_j^{(nj)}\right)_x$$

Wir behaupten nun, daß Satz 5.1. sofort als richtig erkannt werden kann, wenn die obige Zerlegung von $\mathcal{O}_x(u)_x$ für die Halme der Garbe $\mathcal{O}|U_3\cdot u$ in eine ganze Umgebung von x übertragen werden kann:

(2) Vor.: $\exists$ U_2 offene Umgebung von x in U_1 mit der Eigenschaft:

$$\mathcal{O}_y(u)_y = \bigcap_{j=1}^{r} (N_j^{(nj)})_y \quad \forall\, y \in U_2.$$

Beh.: U_2 enthält nur normale Punkte von X.

Beweis:

Sei V offen in U_2 und $f \in {}_X\mathcal{O}'(V)$

Wir zeigen - wie in den Vorbemerkungen 5.2. angekündigt, daß $u \cdot f \in \Gamma(V, \mathcal{O}|U_1 \cdot u)$ ist.

Das ist aber nach Voraussetzung gleichbedeutend mit

$$(u \cdot f)_y \in \bigcap_{j=1}^{r} (N_j^{(nj)})_y \quad \forall\, y \in V \text{ , d.h.}$$

$$(u \cdot f)_y \in N_{j,y}^{(nj)} \quad \forall\, j=1,\dots,r \quad \forall\, y \in V$$

Sei j und y fest gewählt, dann sieht man das so ein:

Nach 5.3.c)(2) ist $u \cdot f \in \mathcal{O}(V)$.

Da $f|(V\setminus S)$ holomorph ist, verschwindet $u \cdot f$ auf $(V\setminus S) \cap N_j$ mit mindestens derselben Ordnung wie u, also mindestens mit der Ordnung n_j.

Zusammen: $(u \cdot f)_y \in N_{j,y}^{(nj)}$.

(3) Idee zum Beweis der Zusatzvoraussetzung:

Faßt man $\mathcal{O}_x(u)_x$ als freie Darstellung der Garbe $\bigcap_{j=1}^{r} N_j^{(nj)}$ im Punkt x auf,

so liegt es nahe, zum Beweis der Zusatzvoraussetzung versuchen nachzuweisen, daß

$\bigcap_{j=1}^{r} N_j^{(nj)}$ lokal um x endlich erzeugt ist; dann existiert nämlich (Garbentheorie!)

eine Umgebung $U_2 \subseteq U_1$ von x, so daß

$$\bigcap_{j=1}^{r} (N_j^{(nj)})_y = \mathcal{O}_y(u)_y \quad \forall\, y \in U_2.$$

Wir werden in 5.11. zeigen, daß sogar alle $N_j^{(m)}$ kohärente Garben von $\mathcal{O}$-Moduln sind. Dann folgt natürlich sogleich die Existenz eines U_2, denn:

$N_j^{(nj)}$ kohärent $\forall\, j$

$\Rightarrow \bigcap_{j=1}^{r} N_j^{(nj)}$ kohärent

Nach (1) ist $(\bigcap_{j=1}^{r} N_j^{(nj)})_x = \mathcal{O}_x(u)_x$

$\Rightarrow \exists\, U_2$ Umgebung von x in U_1, so daß $\bigcap_{j=1}^{r} (N_j^{(nj)})_y = \mathcal{O}_y(u)_y \quad \forall\, y \in U_2.$

Wir schließen diesen Abschnitt ab mit dem Kohärenzbeweis für die $N_j^{(m)}$ (dann ist nach obigen Ausführungen Satz 5.1. bewiesen):

• 5.10. Eine weitere algebraische Darstellung für die $N_j^{(m)}$

(1) Vorbemerkung

In der Situation von Beispiel 5.6.(3) haben wir gezeigt

$$p_j^{(m)} = \mathcal{O}_X: (\mathcal{O}_X: p_j)^m.$$

Diese Formel läßt sich nun in den allgemeinen Fall übertragen und noch auf die ganzen zugehörigen Garben ausdehnen. Wir haben in $\mathcal{G}$.6.8. eine rein algebraische Herleitung dazu gebracht. Hier wollen wir jedoch den von KUHLMANN in [KU2] dazu gegebenen etwas kürzeren analytischen Beweis wiedergeben.

Diese Verallgemeinerung wird es dann erlauben, den Kohärenzbeweis für die $N_j^{(m)}$ auf Erhaltungssätze der Kohärenz - insbesondere 3.4. - abzustützen.

(2) Beh.: $N_j^{(m)} = \mathcal{O}: (\mathcal{O}: I_{N_j})^m \quad \forall\, m \in \mathbb{N} \quad \forall\, j = 1,\dots,r$

(genauer: Es existiert ein natürlicher analytischer Garbenisomorphismus zwischen $N_j^{(m)}$ und $\mathcal{O}: (\mathcal{O}: I_{N_j})^m$)

Beweis:

(2.0) Da wir wieder nur *ein* N_j betrachten, lassen wir im Beweis wieder bei allen mit j indizierten Größen den Index j weg.

Wir zeigen die Gleichheit der Garben N und $\mathcal{O}: (\mathcal{O}: N)$, indem wir die Gleichheit der kanonischen zugehörigen Garbendaten verifizieren.

Sei V offen in X.

(2.1) $N^{(m)}(V)$

$\underset{\text{Def.}}{=}$ $\{f \in {}_X\mathcal{O}(V) \mid f$ verschwindet auf N mit mindestens m-ter Ordnung$\}$

$\underset{\text{Def.}}{=}$ $\{f \in {}_X\mathcal{O}(V) \mid f$ verschwindet in jedem Punkt aus $(V \cap N)\setminus S\setminus S_N$ auf N mit mindestens m-ter Ordnung$\}$

Sei nun $f \in {}_X\mathcal{O}(V)$ und $y \in (V \cap N)\setminus S\setminus S_N$.

Wir untersuchen hier, was es bedeutet, wenn f auf N in y mit mindestens m-ter Ordnung verschwindet.

In 5.6.(1) wurde im wesentlichen festgestellt:

$$\exists\, \psi_y \in (I_N)_y \quad : \quad (I_N)_y = \psi_y\, {}_X\mathcal{O}_y.$$

In 5.6.(2) wurde dann im wesentlichen gezeigt, daß in diesem Falle für f gilt:

f verschwindet auf N in y mit mindestens m-ter Ordnung

$\iff \quad (f)_y \in \psi_y^m\, {}_X\mathcal{O}_y.$

In der Beziehung $(f)_y \in \psi_y^m \, {}_X\mathcal{O}_y$ kann man ψ_y^m auf die linke Seite bringen, da ψ_y ein Nichtnullteiler in $\mathcal{O}_y$ ist:

Da y gewöhnlich in X ist, ist $(X)_y$ irreduzibel.
Also ist $\mathcal{O}_y$ ein Integritätsbereich.
Daher müßte ψ_y identisch verschwinden, *falls* es ein Nullteiler wäre.
Dann würde gelten $(I_N)_y = \{(0)_y\}$ und
daraus folgte $(N)_y = X_y$; *Unsinn !*

$$= \{f \in {}_X\mathcal{O}(V) \mid \frac{(f)_y}{\psi_y^m} \in \mathcal{O}_y \quad \forall\, y \in (V \cap N)\backslash S\backslash S_N\}$$

(2.2) Nun gelingt es mit einer einfachen Umformung, die lästige Einschränkung auf gewöhnliche Punkte wieder loszuwerden und dennoch keine Substanz zu verlieren.

(a) Für $f \in {}_X\mathcal{O}(V)$ gilt:

$$\frac{(f)_y}{\psi_y^m} \in \mathcal{O}_y \qquad \forall\, y \in (V \cap N)\backslash S\backslash S_N$$

$$\iff (\frac{1}{\psi_y^m}\mathcal{O}_y)\cdot(f)_y \subseteq \mathcal{O}_y \qquad \forall\, y \in (V \cap N)\backslash S\backslash S_N$$

Auch in dieser Gestalt läßt sich ψ_y aus der Beziehung eliminieren:

$$\iff (\mathcal{O}_y\colon (I_N)_y)^m\cdot(f)_y \subseteq \mathcal{O}_y \qquad \forall\, y \in (V \cap N)\backslash S\backslash S_N$$

$$\Big[\, h \in \frac{1}{\psi_y}\mathcal{O}_y \iff \psi_y h \in \mathcal{O}_y$$

$$\iff \underbrace{(\psi_y\mathcal{O}_y)}_{=(I_N)_y}h \subseteq \mathcal{O}_y$$

$$\iff h \in \mathcal{O}_y\colon (I_N)_y$$

Also: $\frac{1}{\psi_y}\mathcal{O}_y = \mathcal{O}_y\colon (I_N)_y$

$$\Rightarrow \frac{1}{\psi_y^m}\mathcal{O}_y = (\frac{1}{\psi_y}\mathcal{O}_y)^m = (\mathcal{O}_y\colon (I_N)_y)^m \,\Big\lfloor$$

$$\iff ((\mathcal{O}\colon I_N)^m)_y\cdot(f)_y \subseteq \mathcal{O}_y \qquad \forall\, y \in (V \cap N)\backslash S\backslash S_N$$

[Es ist klar, daß I_N als Idealgarbe einer analytischen Menge eine kohärente Garbe ist.
Also ist $\mathcal{O}\colon I_N$ nach 3.2. definiert und es gilt

$$(\mathcal{O}\colon I_N)_{y'} = \mathcal{O}_{y'}\colon (I_N)_{y'} \qquad \forall\, y' \in X.$$

$(\mathcal{O}: I_N)^m$ ist als kanonisches Bild des Tensorprodukts $\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} (\mathcal{O}: I_N)$ in ${}_X\mathcal{M}$ definiert:

Sei $G := \mathcal{O}: I_N$,

$$\varphi: \overset{m}{\underset{1}{\otimes}} G \ni \sum_{\nu_1,\dots,\nu_m} c_{\nu_1,\dots,\nu_m}\, g_{\nu_1} \otimes\dots\otimes g_{\nu_m} \to$$

$$\to \sum_{\nu_1,\dots,\nu_m} c_{\nu_1,\dots,\nu_m}\, g_{\nu_1}\cdot\ldots\cdot g_{\nu_m} \in \mathcal{M}.$$

Dann ist $G^m = \varphi(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} G)$

φ ist ein Garbenmorphismus (da φ Schnitte in Schnitte überführt).

Also ist φ insbesondere halmtreu, also

$$(\varphi(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} G))_{y'} = \varphi((\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} G)_{y'})$$

$$= \varphi(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} G_{y'}) \qquad \forall\, y' \in X$$

da Tensorproduktbildung mit induktivem Limes vertauschbar ist.

$$\Rightarrow \quad (G^m)_{y'} = (G_{y'})^m \qquad \forall\, y' \in X$$

d.h. $((\mathcal{O}: I_N)^m)_{y'} = ((\mathcal{O}: I_N)_{y'})^m \qquad \forall\, y' \in X$

Wir zeigen nun, daß man hier sogar alle $y \in V \cap N$ zulassen kann:

(b) Beh.: Für $f \in {}_X\mathcal{O}(V)$ gilt:

$$\frac{(f)_y}{\psi_y^m} \in \mathcal{O}_y \quad \forall\, y \in (V\cap N)\setminus S\setminus S_N \iff ((\mathcal{O}: I_N)^m | V)\cdot f \subseteq \mathcal{O}$$

Beweis:

"$\Leftarrow$" trivial als Spezialfall von (a)

"$\Rightarrow$" Wir erbringen den Beweis durch vollständige Induktion nach m.

1. Schritt: $m = 1$

Sei V' offen in V und $h \in (\mathcal{O}: I_N)(V')$

Es ist zu zeigen, daß $f\cdot h \in \mathcal{O}(V')$.

$$(f)_y = \frac{(f)_y}{\psi_y}\cdot \psi_y \in \psi_y\, \mathcal{O}_y = (I_N)_y \qquad \forall\, y \in (V\cap N)\setminus S\setminus S_N$$

$\Rightarrow \quad f|V\backslash S\backslash S_N \in I_N(V\backslash S\backslash S_N) = \mathcal{N}(V\backslash S\backslash S_N)$

$f \in {}_X\mathcal{O}(V)$

$\underset{\text{Def. } \mathcal{N}(V)}{\Rightarrow} \quad f \in \mathcal{N}(V) = I_N(V)$

$\Rightarrow \quad f\cdot h \in \mathcal{O}(V')$

2. Schritt: Schluß von m-1 auf m

Sei V' offen in V und $h_1,\ldots,h_m \in (\mathcal{O}\colon I_N)(V')$.

Man zeigt ganz genauso wie oben: $f\cdot h_1\cdot\ldots\cdot h_m \in \mathcal{O}(V')$:

$$(f\cdot h_1\cdot\ldots\cdot h_{m-1})_y = \frac{(f)_y}{\psi_y^m}\cdot((h_1)_y\psi_y)\cdot\ldots\cdot((h_{m-1})_y\psi_y)\cdot\psi_y$$

$$\in \psi_y\cdot\mathcal{O}_y = (I_N)_y \quad \forall\, y \in (V'\cap N)\backslash S\backslash S_N$$

$\Rightarrow \quad (f\cdot h_1\cdot\ldots\cdot h_{m-1})|V'\backslash S\backslash S_N \in I_N(V'\backslash S\backslash S_N) = \mathcal{N}(V'\backslash S\backslash S_N)$

Induktionsvoraussetzung: $f\cdot h_1\cdot\ldots\cdot h_{m-1} \in \mathcal{O}(V')$

$\underset{\text{Def. } \mathcal{N}(V')}{\Rightarrow} \quad f\cdot h_1\cdot\ldots\cdot h_{m-1} \in \mathcal{N}(V') = I_N(V')$

$\Rightarrow \quad (f\cdot h_1\cdot\ldots\cdot h_{m-1})\cdot h_m \in \mathcal{O}(V')$

(2.3) Zusammen hat man jetzt:

$\mathcal{N}^{(m)}(V)$

$= \{f \in {}_X\mathcal{O}(V) \mid ((\mathcal{O}\colon I_N)^m|V)\cdot f \subseteq \mathcal{O}\}$

$= \{f \in {}_X\mathcal{O}(V) \mid (f)_y \in \mathcal{O}_y\colon ((\mathcal{O}\colon I_N)^m)_y \quad \forall\, y \in V\}$

Man kann das noch weiter zusammenfassen, wenn man beachtet, daß

$$\mathcal{O}_y\colon ((\mathcal{O}\colon I_N)^m)_y = (\mathcal{O}\colon (\mathcal{O}\colon I_N)^m)_y \quad \forall\, y \in V.$$

Nach 3.2. ist dazu zu zeigen, daß $(\mathcal{O}\colon I_N)^m$ kohärent ist.

Da I_N als Idealgarbe zu N kohärent ist und der Keim $(u)_y \in (I_N)_y \cap \mathcal{O}_y$ nach Definition des universellen Nenners für $y \in U_1$ ein Nichtnullteiler ist (vgl. 5.3.c)), folgt aus 3.4.:

$\mathcal{O}\colon I_N$ ist kohärent.

Dann ist auch das Tensorprodukt $\bigotimes_1^m (\mathcal{O}\colon I_N)$ kohärent.

Schließlich ist das kanonische Bild $(\mathcal{O}\colon I_N)^m$ kohärent.

$= \{f \in {}_X\mathcal{O}(V) \mid f \in (\mathcal{O}: (\mathcal{O}: I_N)^m)(V)\}$

Nach Definition ist $\mathcal{O}: (\mathcal{O}: I_N)^m \subseteq V$:

$$(\mathcal{O}: (\mathcal{O}: I_N)^m)_y = \mathcal{O}_y: (\mathcal{O}_y: (I_N)_y)^m \subseteq \mathcal{O}_y \quad \forall\, y \in V.$$

wie in 5.6.(3)

Daher gilt endlich:

$= (\mathcal{O}: (\mathcal{O}: I_N)^m)(V)$

- 5.11. Behauptung: $N_j^{(m)}$ ist kohärent

Dies folgt nun unmittelbar aus 3.4., da
im Beweis zu 5.10.(2.3) bereits gezeigt wurde, daß $(\mathcal{O}: I_N)^m$ kohärent ist,
und weil $(1)_y \in (\mathcal{O}: I_N)_y^m \cap \mathcal{O}_y \quad \forall\, y \in X$.

Damit ist nach 5.9. Satz 5.1. bewiesen.

- 5.12. Bemerkung

(0) Man kann den Beweis von Satz 5.1. mit derselben Argumentation auch dadurch erbringen, daß man die Normalität von $\mathcal{O}_y$ in U_2 in der Form nachweist, wie sie rein algebraisch (vgl. 1.6.) definiert ist.

Dieser Beweis ist jedoch nicht effektiver, sondern enthält nur noch einen weiteren Schritt. Wir wollen jedoch angeben, wie das geht, da man dadurch auch eine rein algebraische Interpretation der Beweisidee erhält.

(1) Seien wieder Bezeichnungen wie in 5.3.a),b) und c) gewählt.
Will man den Offenheitsbeweis auf Satz 9.2.5. des algebraischen Anhangs abstützen, dann genügt es wegen 4.4. zu zeigen, daß eine Umgebung $U_2 \subseteq U_1$ von x existiert, so daß $(u)_y\, \mathcal{O}_y$ für *alle* $y \in U_2$ nur isolierte Primärkomponenten besitzt.

Man zerlegt $\mathcal{O}_x(u)_x$ wie in 5.4. in Primärkomponenten und interpretiert diese Primärkomponenten wie in 5.7. (zusammen mit 5.5., 5.6.(1)).

Das liefert (mit der Bezeichnung von 5.8.) eine Primärkomponentenzerlegung der Form

$$\mathcal{O}_x(u)_x = \bigcap_{j=1}^{r} (N_j^{(nj)})_x.$$

Mit dem Schluß von 5.10.(2) erhält man für die Garben $N_j^{(nj)}$ die Darstellung

$$N_j^{(nj)} = \mathcal{O}: (\mathcal{O}: I_{N_j})^{nj}.$$

Wie in 5.11. wird gezeigt, daß $\mathcal{O}: (\mathcal{O}:(I_{N_j})^{n_j}$ eine kohärente analytische Modulgarbe ist und daher gilt (wie in 5.9.(3)):

$$\exists\, U_2 \text{ offene Umgebung von } x \text{ in } U_1 \text{ mit } \mathcal{O}_y(u)_y = \bigcap_{j=1}^{r} (N_j^{(n_j)})_y \qquad \forall\, y \in U_2$$

Zunächst stellen wir fest, daß

$(N_j^{(m)})_y$ nur isolierte Primärkomponenten besitzt $\quad (\forall\, m \in \mathbb{N})$

⌈Sei $(N_j^{(m)})_y = \bigcap_{i=1}^{l} q_i$ die Primärkomponentenzerlegung von $(N_j^{(m)})_y$.

Dann ist $(I_{N_j})_y = \bigcap_{\substack{i=1 \\ q_i \text{ isoliert}}}^{l} \sqrt{q_i}$,

$$\text{denn: } (I_{N_j})_y \subseteq \sqrt{(N_j^{(m)})_y} \subseteq \sqrt{(I_{N_j})_y} \underset{\substack{\text{da X reduziert ist} \\ \text{(HILBERT's Nullstellensatz!)}}}{=} (I_{N_j})_y$$

$$\Rightarrow (I_{N_j})_y = \sqrt{(N_j^{(m)})_y} = \bigcap_{i=1}^{l} \sqrt{q_i} = \bigcap_{\substack{i=1 \\ q_i \text{ isoliert}}}^{l} \sqrt{q_i}$$

eingebettete $\sqrt{q_i}$ enthalten nämlich noch ein isoliertes.

A: q_1 ist eine eingebettete Primärkomponente.

Dann ist $q_1 \setminus (I_{N_j})_y \neq \emptyset$

denn: q_1 eingebettet $\Rightarrow$ o.B.d.A. $\sqrt{q_2} \subseteq \sqrt{q_1}$ und q_2 isoliert

$\sqrt{q_1} \neq \sqrt{q_2}$

$\Rightarrow q_1 \setminus \sqrt{q_2} \neq \emptyset$

⌈A: $q_1 \setminus \sqrt{q_2} = \emptyset \Rightarrow q_1 \subseteq \sqrt{q_2} \Rightarrow \sqrt{q_1} \subseteq \sqrt{q_2}$

⌊$\sqrt{q_2} \subseteq \sqrt{q_1}$

$\Rightarrow \sqrt{q_1} = \sqrt{q_2}$ ⨳

$$\Rightarrow q_1 \setminus (I_{N_j})_y = \bigcup_{\substack{i=1 \\ q_i \text{ isoliert}}}^{n} q_1 \setminus \sqrt{q_i} \supseteq q_1 \setminus \sqrt{q_2} \neq \emptyset$$

Nach Definition einer Primärkomponentenzerlegung ist auch

$(\bigcap_{i=2}^{l} q_i) \setminus q_1 \neq \emptyset$.

Sei nun $f_y \in (\bigcap_{i=2}^{l} q_i)\setminus q_1$ und $g_y \in q_1\setminus(I_{N_j})_y$.

Dann ist $f_y \cdot g_y \in \bigcap_{i=1}^{l} q_i = (N_j^{(m)})_y$

und $g_y \notin (I_{N_j})_y$

$\Rightarrow$ $f_y \in (N_j^{(m)})_y$

[Man braucht das Verschwinden in m-ter Ordnung ja nur in den gewöhnlichen Punkten, in denen auch N_j gewöhnlich ist, in einer Umgebung von y zu testen. Dort verwendet man das Resultat von 5.6.(1) wie im Anfang des Beweises zu 5.10.(2).

Nach Konstruktion war aber $f_y \notin \bigcap_{i=1}^{l} q_i = (N_j^{(m)})_y$. ※

Zusammen mit der Darstellung von $\mathcal{O}_y(u)_y$ als Durchschnitt gewisser $(N_j^{(m)})_y$ $\forall\, y \in U_2$ ergibt sich dann, daß

$\mathcal{O}_y(u)_y$ $\forall\, y \in U_2$ *nur isolierte* Primärkomponenten besitzt.

[Wegen $\mathcal{O}_y(u)_y = \bigcap_{j=1}^{r}(N_j^{(nj)})_y$ $\forall\, y \in U_2$ erhält man durch Primärkomponentenzerlegung der $(N_j^{(nj)})_y$ eine Zerlegung von $\mathcal{O}_y(u)_y$ in Primärideale.

Wir zeigen, daß diese Zerlegung sogar eine Primär*komponenten*zerlegung ist und zwar in isolierte Primärkomponenten.

Hierzu genügt es wegen obiger Feststellung zu zeigen,

daß z.B. $\sqrt{q_1} \not\subseteq \sqrt{q_2}$, falls q_1 bzw. q_2 Primärkomponente von $(N_1^{(n_1)})_y$ bzw. $(N_2^{(n_2)})_y$ ist.

(Dann ist nämlich die Menge aller Primärideale zu allen $(N_j^{(nj)})_y$ bereits isoliert).

A: $\sqrt{q_1} \subseteq \sqrt{q_2}$

Da q_i eine (isolierte) Primärkomponente von $(N_i^{(ni)})_y$ ist $(i = 1,2)$, ist $\sqrt{q_i}$ eine Primkomponente von $(I_{N_i})_y$ (vgl. auch oben ausgeführtes).

Also ist $Z(\sqrt{q_i})$ eine irreduzible Komponente von $Z((I_{N_i})_y) = (N_i)_y$ $(i = 1,2)$

Nach unserer Widerspruchsannahme ist $Z(\sqrt{q_2}) \subseteq Z(\sqrt{q_1})$.

Also liegt eine irreduzible Komponente von $(N_2)_y$ (sie sei mit K_2 bezeichnet) in einer irreduziblen Komponente von $(N_1)_y$,

$K_2 \subseteq (N_1)_y$ für eine irreduzible Komponente K_2 von $(N_2)_y$.

$\Rightarrow K_2 \subseteq (N_1 \cap N_2)_y$

$\Rightarrow \dim K_2 < \dim N_2$

da N_i irreduzible Komponenten von $u^{-1}(0)$ sind und [WH][1] Chap. 3 Sec. 1 Theorem 1G(e), S. 75

$\lightning$ N_2 ist irreduzibel, also reindimensional: $\dim K_2 = \dim N_2$

(2) Damit läßt sich der Hintergrund, warum der Beweis von Satz 5.1. gerade so funktioniert, rein algebraisch folgendermaßen interpretieren (gemäß [KU2]): Ist x ein normaler Punkt von X, dann ist die Singularitätenmenge von X in x - und damit auch in einer vollen Umgebung von x - mindestens 2-codimensional.

Ist nun u in einer solchen Umgebung U_1 von x universeller Nenner, so besitzt nach dem algebraischen Satz 9.5.4. $(u)_x \mathcal{O}_x$ nur isolierte Primärkomponenten derselben Dimension.
Daraus kann man folgern, daß dann schon für alle Punkte y in einer Umgebung U_2 von x in U das Ideal $(u)_y \mathcal{O}_y$ nur isolierte Primärkomponenten der gleichen Dimension besitzt.
Daraus kann man wiederum rein algebraisch (mit 9.2.5.) folgern, daß X nur normale Punkte enthält.

6. Der GRAUERT-REMMERT'sche Beweis der Offenheit der Menge der normalen Punkte.

Wir schicken einen technischen Hilfssatz voraus:

• 6.1. Lemma

Vor.: Sei X ein komplexer Raum.

J sei eine kohärente analytische Modulgarbe über X.

$S := \operatorname{supp} J := \{x \in X \mid J_x \neq 0\}$

Beh.: S ist analytisch in X

Beweis:

(0) Wir führen den Beweis zurück auf die einfache Aussage (vgl. etwa [KR] (4.1) S. 29):

Ist $\mathcal{K} \subseteq {}_X\mathcal{O}$ eine Idealgarbe von endlichem Typ,

so ist $\{x \in X \mid \mathcal{K}_x \neq \mathcal{O}_x\}$ eine analytische Menge in X.

Da J vom endlichen Typ auf X ist, ist $S = \operatorname{supp} J$ bereits abgeschlossen in X. Bleibt also die Lokalanalytizität von S zu zeigen; wir dürfen uns also auf Umgebungen von Punkten aus S zurückziehen.

(1) Sei $x \in S$.

Da J vom endlichen Typ auf X ist, gilt in einer Umgebung U von x:

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{O}_z (g_i)_z \qquad \forall\, z \in U,$$

$$\text{wobei } g_i \in J(U) \quad \forall\, i$$

Wir betrachten über U die analytischen Modulgarbenmorphismen

$$h_i\colon\ \mathcal{O}|U \ni (f)_z \quad \to (f)_z (g_i)_z \in J|U.$$

Sei $\mathcal{K} := \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Kern} h_i$.

Dann gilt nach Konstruktion

$$S \cap U = \{z \in U \mid \mathcal{K}_z \neq \mathcal{O}_z\}$$

[Für $z \in U$ hat man nämlich:

$$z \in S \underset{\text{Def. } S}{\iff} J_z \neq 0$$

$$\underset{\text{Def. } g_i}{\iff} (g_i)_z \neq 0 \quad \text{für ein } i$$

$$\underset{\text{Def. } h_i}{\iff} (\operatorname{Kern}(h_i))_z \neq \mathcal{O}_z \quad \text{für ein } i$$

$$\underset{\text{Def. } K}{\Longleftrightarrow} K_z \neq \mathcal{O}_z$$

Da J kohärent ist, sind es auch alle Kern (h_i) und somit auch der Durchschnitt K.

Insbesondere ist K vom endlichen Typ.

6.2. Vorbemerkung

Im KUHLMANN'schen Offenheitsbeweis (Abschnitt 5.) haben wir gesehen, daß eine genauere Untersuchung der von einem universellen Nenner erzeugten Idealgarbe geeignet ist, die Offenheit der Menge der normalen Punkte nachzuweisen.

Sei X ein komplexer Raum, $x \in X^x$ normal.

Wir sehen uns nochmals die wesentlichen *algebraischen* Argumente des KUHLMANN'schen Offenheitsbeweises an:

In einer Umgebung U_1 von x hatten wir einen universellen Nenner u, o.B.d.A. war $(u)_x$ eine Nichteinheit.

Das Nullstellengebilde $u^{-1}(0)$ ließ sich nach Verkleinern von U_1 in irreduzible Komponenten $N_1 \cup \ldots \cup N_r$ zerlegen, welche auch in x irreduzibel waren.

Wir zerlegten das Ideal $\mathcal{O}_x(u)_x$ in Primärkomponenten:

$$\mathcal{O}_x(u)_x = \bigcap_{j=1}^{r} q_j \quad , \text{ wobei}$$

$$p_j := \sqrt{q_j} \quad \text{minimale Primideale sind.}$$

Nach HILBERT's Nullstellensatz war

$$p_j = (I_{N_j})_x .$$

Für die q_j ergab sich rein algebraisch

$$\begin{aligned} q_j &= p_j^{(nj)} \\ &= \left(t_j^{nj} \frac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{O}_x \setminus p_j}\right) \cap \mathcal{O}_x \quad , \; t_j \in \mathcal{O}_x \\ &\underset{9.6.7.}{=} (s_j^{nj}\, \mathcal{O}_x) \cap \mathcal{O}_x \qquad , \; s_j \in \mathcal{M}_x \; (= \text{Quot } \mathcal{O}_x) \\ &= \mathcal{O}_x : (\mathcal{O}_x : p_j)^{nj} \end{aligned}$$

Es wurde nun als wichtiges Resultat festgestellt:

$N_j^{(nj)} := \mathcal{O}\colon (\mathcal{O}\colon I_{N_j})^{nj}$ ist eine *kohärente* analytische Modulgarbe

mit dem Halm in x: $(N_j^{(nj)})_x = \mathcal{O}_x\colon (\mathcal{O}_x\colon p_j)^{nj}$

Die übrigen Teile dieses Beweises bestanden hauptsächlich aus geometrischen Interpretationen der angeschriebenen algebraischen Objekte; nur dazu wurde der tiefliegende Dimensionssatz 4.2. benutzt.

Man kann sagen, daß die wesentliche algebraische Idee in der Betrachtung diverser Idealquotienten bestand; die interessante Beziehung nimmt symmetrisch geschrieben die Form an:

$$\mathcal{O}_x\colon q_j = (\mathcal{O}_x\colon p_j)^{nj}.$$

Im Spezialfall $r = 1$ (also $\mathcal{O}_x(u)_x = q_1$ primär) hätten wir

$$\mathcal{O}_x\colon (\mathcal{O}_x(u)_x) = (\mathcal{O}_x\colon I_{u^{-1}(0)})^{nj}.$$

Es ist übrigens gar nicht so abwegig, den Idealquotienten $\mathcal{O}_x\colon (\mathcal{O}_x(u)_x)$ zu betrachten, wenn man bedenkt:

$$u \text{ universeller Nenner } \Rightarrow (u)_x\, \mathcal{O}_x' \subseteq \mathcal{O}_x \iff \mathcal{O}_x' \subseteq \mathcal{O}_x\colon (\mathcal{O}_x(u)_x).$$

Jedoch läßt sich der Idealquotient $\mathcal{O}_x\colon (\mathcal{O}_x(u)_x)$ nicht ohne weiteres algebraisch exakt mit Hilfe der Idealquotienten $\mathcal{O}_x\colon p_j$ beschreiben. Nun zeigt sich jedoch mit der hernach ausgeführten Beweisidee von GRAUERT und REMMERT, daß man hier statt mit $\mathcal{O}_x(u)_x$ auch mit dem Radikalideal $I_{u^{-1}(0)}$ arbeiten kann; man darf nur nicht so scharfe algebraische Umformungen wie KUHLMANN verwenden sondern trickreiche.

• 6.3. Satz

Vor.: Sei X ein (reduzierter) komplexer Raum und

$A := \{x \in X \mid x \text{ ist ein } \textit{nicht}\text{-normaler Punkt von } X\} \neq \emptyset$

Beh.: A ist eine analytische Menge in X.

Beweis:

(0) Vorbemerkungen

Wir werden zeigen,

daß $X \setminus A$ offen und

A lokalanalytisch ist.

Da die Behauptungen lokaler Natur sind, können wir o.B.d.A. annehmen, daß

$X \subseteq \mathbb{C}^n$ eine lokalanalytische Menge ist und

es einen universellen Nenner u für X gibt (d.h. - vgl. 1.9. - : $(u)_x\, \mathcal{O}_x' \subseteq \mathcal{O}_x \quad \forall\, x \in X$ und

$(u)_x \in \mathcal{O}_x$ Nichtnullteiler $\forall\, x \in X$)

Fassen wir zunächst den Offenheitsbeweis für $X \setminus A$ ins Auge! (Die übrige Behauptung wird sich dann fast von selbst aus Lemma 6.1. ergeben.)
Es liegt nahe, daß man die Menge A der nichtnormalen Punkte von X in Beziehung bringen kann zum Nullstellengebilde $u^{-1}(0)$ von u.
$u^{-1}(0)$ ist eine analytische Menge in X.

Das Problem läßt sich dadurch lösen, daß man zwischen $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ eine *kohärente Testgarbe* T einschiebt; an $T_x = \mathcal{O}_x$ soll man (wie an $\mathcal{O}_x' = \mathcal{O}_x$) die Normalität von X in x testen können, aber für T soll sich relativ leicht die Kohärenz nachweisen lassen (was für $\mathcal{O}'$ anscheinend nicht leicht ist).
Die Existenz einer solchen kohärenten Testgarbe wird sofort einen Offenheitsbeweis für $X \setminus A$ und mit Lemma 6.1. fast ebenso selbstverständlich einen Beweis der Lokalanalytizität für A liefern.

(1) Sei $I := I_{u^{-1}(0)}$ die zu $u^{-1}(0)$ gehörige Idealgarbe in ${}_X\mathcal{O}$.

Wir betrachten die Garbe

$$\boxed{T := ({}_X\mathcal{O} : I) \cap {}_X\mathcal{O}'}$$

Dann liegen nach Konstruktion

$${}_X\mathcal{O} \subseteq T \subseteq {}_X\mathcal{O}' \quad .$$

Da I als Idealgarbe kohärent ist, ergeben sich die Halme von T gemäß 3.2. zu

$$T_x = ({}_X\mathcal{O}_x : I_x) \cap {}_X\mathcal{O}_x' \qquad \forall\, x \in X.$$

(2) (Beh.): $A = \{x \in X \mid T_x \neq {}_X\mathcal{O}_x\}$

"$\supseteq$" trivial:

Aus $\mathcal{O}_x \subsetneqq T_x \subseteq \mathcal{O}_x'$ folgt sofort $\mathcal{O}_x \neq \mathcal{O}_x'$, also $x \in A$

"$\subseteq$" Sei $x \in A$, also $\mathcal{O}_x \subsetneqq \mathcal{O}_x'$.

Dann gibt es $\underbrace{m \in \mathcal{O}_x'}$ mit $m \notin \mathcal{O}_x$

$$\underset{\text{Def.u}}{\Rightarrow}\ m\cdot[(u)_x\, \mathcal{O}_x] \subseteq \mathcal{O}_x$$

Man kann m sogar so wählen,

daß $m\, I_x \subseteq \mathcal{O}_x$.

(Dann ist $m \in (\mathcal{O}_x : I_x) \cap \mathcal{O}_x' = T_x$ und wir sind fertig.)

Zunächst mal liefert der HILBERT'sche Nullstellensatz wie in 5.5.:

$$I_x = \sqrt{(u)_x \mathcal{O}_x}$$

$$\Rightarrow I_x^k \subseteq (u)_x \mathcal{O}_x \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N}$$

[$\mathcal{O}_x$ ist NOETHER'sch, also I_x endlich erzeugt, etwa

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{O}_x f_i \quad , f_i \in I_x .$$

Wegen $I_x = \sqrt{(u)_x \mathcal{O}_x}$ gibt es zu jedem i ein $k_i \in \mathbb{N}$ mit

$$f_i^{k_i} \in (u)_x \mathcal{O}_x \quad \forall i .$$

Sei nun $k := \sum_{i=1}^{n} (k_i - 1) + 1$, dann ist

$$I_x^k \underset{\text{Def.}}{=} \sum_{\rho_1 + \ldots + \rho_n \geq k} \mathcal{O}_x f_1^{\rho_1} \cdot \ldots \cdot f_n^{\rho_n} \subseteq (u)_x \mathcal{O}_x ,$$

denn: $\rho_1 + \ldots + \rho_n \geq k \Rightarrow \rho_i \geq k_i$ für mindestens ein i.

z.B.: $\rho_i < k_i$ für $i = 1, \ldots, n-1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho_n &\geq k - \rho_1 - \ldots - \rho_{n-1} \\ &\geq k - (k_1 - 1) - \ldots - (k_{n-1} - 1) \\ &\underset{\text{Def.}k}{=} (k_n - 1) + 1 \\ &= k_n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g_n^{\rho_n} \in (u)_x \mathcal{O}_x .$$

]

Daraus folgt durch Multiplikation mit $\mathcal{O}_x'$:

$$I_x^k \mathcal{O}_x' \subseteq (u)_x \mathcal{O}_x' \underset{\text{Def. } (u)_x}{\subseteq} \mathcal{O}_x \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} .$$

Wegen $\mathcal{O}_x' \nsubseteq \mathcal{O}_x$ $(x \in A!)$ kann man $k \in \mathbb{N}$ überdies so wählen, daß

$$I_x^{k-1} \mathcal{O}_x' \nsubseteq \mathcal{O}_x \quad , \text{ also}$$

$$(I_x^{k-1} \mathcal{O}_x') \setminus \mathcal{O}_x \neq \emptyset .$$

Nun nehme man ein $m \in (I_x^{k-1} \mathcal{O}_x') \setminus \mathcal{O}_x$!

Dann ist

$$m \, I_x \subseteq (I_x^{k-1} \mathcal{O}_x') \cdot I_x = I_x^k \mathcal{O}_x' \subseteq \mathcal{O}_x$$

(3) Kohärenzbeweis für $\mathcal{T}$.

(3.1) In 3.3./4. hatten wir eine Garbenisomorphie definiert durch

$$\mathcal{O}_x\colon I_x \ni (m)_x \to h_{(m)_x} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(I_x, \mathcal{O}_x) \quad (x \in X) \quad ,$$

wobei $h_{(m)_x}\colon I_x \ni (g)_x \to (m)_x(g)_x \in \mathcal{O}_x$.

(Man beachte, daß
$(u)_x \in I_x \cap \mathcal{O}_x$ Nichtnullteiler $\forall\, x \in X$)

Damit erhalten wir hier eine Einbettung

$$\mathcal{T}_x \ni (m)_x \to h_{(m)_x} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(I_x, \mathcal{O}_x)$$

(3.2) Sei $(m)_x \in M_x$ $(= \mathrm{Quot}\,\mathcal{O}_x)$ vorgegeben.

(Beh.): Folgende Aussagen sind gleichwertig:

(i) $(m)_x\, I_x \subseteq \mathcal{O}_x$ und $(m)_x \in \mathcal{O}_x'$

(ii) $(m)_x\, I_x \subseteq I_x$

"(i) ⇒ (ii)"

Sei $(g)_x \in I_x$,

etwa $g \in I(U)$, U offene Umgebung von x in X.

Nach Voraussetzung ist

$(m)_x\, (g)_x \in \mathcal{O}_x$ und m beschränkt nahe x ,

o.B.d.A. $m\cdot g \in \mathcal{O}(U)$, $m|D$ definiert und beschränkt, wobei D offen und dicht in U.

Nun gilt für alle $z \in u^{-1}(0) \cap U$:

$$(m\cdot g)(z) = \lim_{\substack{z'\to z\\ z'\in D}} (m\cdot g)(z')$$

(da $m\cdot g \in \mathcal{O}(U)$ und D dicht in U)

$$= \lim_{\substack{z'\to z\\ z'\in D}} m(z')g(z')$$

(da $m|D \in \mathcal{O}(D)$)

$$= 0$$

(da $m|D$ beschränkt und $g \in I(U)$, also $(g(z') \to)\ g(z) = 0$)

Also: $m \cdot g \in I(U)$

"(ii) $\Rightarrow$ (i)"

Es ist nur zu zeigen, daß $(m)_x \in \mathcal{O}_x'$

und das erledigt ein algebraischer Standardschluß:

Da $\mathcal{O}_x$ NOETHER'sch ist, ist I_x ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_x$-Modul, also

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{O}_x f_i \quad , f_i \in I_x \qquad (*)$$

$(m)_x \, I_x \subseteq I_x$

$$\underset{(*)}{\Rightarrow} \quad (m)_x f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} f_j \quad \text{für gewisse } a_{i,j} \in \mathcal{O}_x$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} (m)_x f_1 \\ \vdots \\ (m)_x f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad (a_{i,j} - \delta_{i,j}(m)_x)_{i,j} \cdot (f_j)_j = (0)$$

$$\Rightarrow \quad \det\,((a_{i,j} - \delta_{i,j}(m)_x)_{i,j}) \cdot f_k = 0 \qquad \forall k$$

(triviale Determinantenrechnung: vgl. etwa in [KR] (A.6) Beweis S. A-4)

$$\underset{(*)}{\Rightarrow} \quad \det\,(\text{------------}) \cdot I_x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \det\,(\text{------------}) \cdot (u)_x = 0$$

$(u)_x$ Nichtnullteiler in $\mathcal{M}_x$

$$\Rightarrow \quad \det\,((a_{i,j} - \delta_{i,j}(m)_x)_{i,j}) = 0$$

Entwickeln der Determinante zeigt, daß sie die Form hat:

$$\det\,(\text{------------}) = (m)_x^n + A_1 (m)_x^{n-1} + \ldots + A_n$$

mit $A_k \in \mathcal{O}_x \quad \forall k$

$\Rightarrow$ $(m)_x$ ganz-algebraisch über $\mathcal{O}_x$,

d.h. $(m)_x \in \mathcal{O}_x'$

(3.3) Nun erhalten wir für das Bild der unter (3.1) definierten

Einbettung $\mathcal{T}_x \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(I_x, \mathcal{O}_x)$:

Bild $\mathcal{T}_x = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(I_x, I_x)$

[Zunächst mal ist für $(m)_x \in \mathcal{T}_x$ nach (3.2) "(i) $\Rightarrow$ (ii)"

$h_{(m)_x}(I_x) \subseteq I_x$.

Ist andererseits $(m)_x \in \mathcal{O}_x : I_x$ mit $h_{(m)_x} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(I_x, I_x)$, also

$h_{(m)_x}(I_x) \subseteq I_x$, dann ist nach (3.2) "(ii) $\Rightarrow$ (i)" :

$(m)_x \in \mathcal{O}_x$'

$\lightning$

Also haben wir einen Isomorphismus

$$\mathcal{T}_x \ni (m)_x \to h_{(m)_x} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(I_x, I_x) \quad (x \in X)$$

Da I eine kohärente Garbe von $\mathcal{O}$-Moduln ist, gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(I_x, I_x) = (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(I, I))_x \quad \forall\ x \in X.$$

Durch die halmweisen Isomorphismen $\mathcal{T}_x \to (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(I,I))_x$ werden Schnitte in Schnitte übergeführt.

Zusammen : $\boxed{\mathcal{T} \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(I,I)}$

Da I eine kohärente Garbe von $\mathcal{O}$-Moduln ist, zeigen die Erhaltungssätze der Kohärenz, daß $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(I,I)$ kohärent ist.

Mithin ist auch $\mathcal{T}$ kohärent.

(4) (Beh.): $X \setminus A$ ist offen

Sei $x \in X \setminus A$.

Dann ist nach (2)

$$\mathcal{T}_x = \mathcal{O}_x$$

Da $\mathcal{O}$ und nach (3) auch $\mathcal{T}$ kohärent sind, folgt daraus

$$\mathcal{T}_z = \mathcal{O}_z \quad \forall\ z \in U \text{ für eine Umgebung } U \text{ von } x.$$

Das bedeutet aber nach (2) wiederum

$$U \subseteq X \setminus A.$$

$X \setminus A$ ist also offen in X.

(5) (Beh.): A ist lokalanalytisch

Wir bringen dazu (2) in die Form

$$A = \{x \in X \mid ({}^{\mathcal{T}}/_{\mathcal{O}})_x \neq 0\}.$$

Da $\mathcal{T}$ und $\mathcal{O}$ kohärent sind, ist es auch ${}^{\mathcal{T}}/_{\mathcal{O}}$ und die Behauptung folgt aus Lemma 6.1.

7. Der Normalisierungssatz von OKA

Wir hatten uns in Abschnitt 2 (vgl. die Vorbemerkung 2.0.) zum Ziel gesetzt, analytische Mengen "punktual" zu normalisieren. Bei dieser Gelegenheit haben wir bereits darauf hingewiesen, daß daraus im Zusammenhang mit einem Offenheitssatz ein lokaler Normalisierungssatz folgen wird und daß die sich ergebenden lokalen Normalisierungen komplexer Räume eindeutig bestimmt sind und sich daher verheften lassen. Wir haben inzwischen in Abschnitt 5 (mit den vorbereitenden Abschnitten 3 und 4) und in Abschnitt 6 zwei "Offenheitsbeweise" wiedergegeben. Nun sind wir in der Lage, das in Abschnitt 2 vorgezeichnete Programm zu erfüllen:

• 7.1. Der lokale Normalisierungssatz

Vor.: Sei A eine lokalanalytische Menge im $\mathbb{C}^n$, $a \in A$

Beh.: Es gibt eine "lokale Normalisierung" $\nu: A_1 \to A$ von A in a,
d.h. es gibt eine Umgebung U von a in A,
eine lokalanalytische Menge A_1 in $\mathbb{C}^n$ mit *nur normalen* Punkten und
eine eigentliche Modifikation $\nu: A_1 \to U$.
Man kann es dabei so einrichten, daß die zu ν gehörige Ausnahmemenge $B \subseteq A$ in der Singularitätenmenge $A^\times$ von A liegt: $B \subseteq A^\times$.

Beweis:
Das ist eine unmittelbare Folgerung
aus dem "punktualen" Normalisierungssatz 2.7. und
dem Offenheitssatz 5.1. bzw. 6.3.:

Nach 2.7. gibt es
eine eigentliche Modifikation $\rho: A_1' \to A'$ $(A' \in (A)_a$ geeignet),
so daß A_1 normal ist in den Punkten $a_1 \in \rho^{-1}(a)$.

Nach 5.1. bzw. 6.3. kann man dann
eine Umgebung U_1' von $\rho^{-1}(a)$ in A_1' finden mit nur normalen Punkten.

Da ρ eigentlich ist, gibt es dazu
eine Umgebung U von a in $A \cap A'$ mit $\rho^{-1}(U) \subseteq U_1'$.

Nun setze man

$A_1 := \rho^{-1}(U)$ und

$\nu := (\rho | A_1 \to U)$

• 7.2. Bemerkung

- Kohärenz der Garbe schwach holomorpher Funktionskeime -

Vor.: Sei X ein komplexer Raum

Beh.: Die Garbe ${}_X\mathcal{O}'$ schwach holomorpher Funktionskeime ist kohärent.

Beweis:

(0) Wir können diesen wichtigen Satz als Anwendung des lokalen Normalisierungssatzes 7.1. hier im Grunde nur zitieren; zum Beweis müssen wir nämlich einen weiteren tiefliegenden Satz heranziehen, den wir an dieser Stelle nicht verifizieren können:

Satz von der Kohärenz der Bildgarbe:

Seien X_1, X komplexe Räume und

ρ: $X_1 \to X$ eine eigentliche, holomorphe Abbildung mit endlichen Fasern.
G sei eine kohärente Garbe von ${}_{X_1}\mathcal{O}$-Moduln.
Dann ist die Bildgarbe $\rho_*(G)$ eine kohärente Garbe von ${}_X\mathcal{O}$-Moduln.

(siehe etwa [NA] Chap. IV, 4. Theorem 7, S. 81)

(1) Da Kohärenz eine lokale Eigenschaft ist, können wir o.B.d.A. annehmen, daß X eine solche Umgebung eines vorgegebenen Punktes ist, zu der es gemäß 7.1. eine Normalisierung ν: $X_1 \to X$ gibt.

Dann ist nach 2.8. ${}_X\mathcal{O}' = \nu_*({}_{X_1}\mathcal{O})$ und diese Garbe ist nach dem in (0) zitierten Satz kohärent.

Bemerkung: Aus der Kohärenz von ${}_X\mathcal{O}'$ kann man nun auch mit Hilfe von 6.1. folgern, daß die Menge A der nichtnormalen Punkte von X analytisch ist:

$$A = \operatorname{supp} {}^{{}_X\mathcal{O}'}\!/_{{}_X\mathcal{O}} \text{ ist analytisch nach 6.1.}$$

Wir haben diese Aussage jedoch in 6.3. bereits viel eleganter bewiesen. Wir wollten nur darauf hinweisen, daß man die Analytizität von A (so wie KUHLMANN es eben gemacht hat) auch zeigen kann, wenn man den GRAUERT-REMMERT'schen Offenheitsbeweis nicht zur Verfügung hat.

KUHLMANN hat übrigens in seiner Arbeit "Über die normalen Punkte eines komplexen Raumes" noch einen direkten, aber doch wieder ziemlich komplizierten Beweis zur Analytizität von A angegeben; es lohnt sich nicht, hier weiter darauf einzugehen.

• 7.3. Definition

Seien X_1 und X komplexe Räume.
Eine holomorphe Abbildung ν: $X_1 \to X$ heißt eine *Normalisierung von X*,

falls X_1 ein normaler komplexer Raum ist und

ν eine eigentliche Modifikation ist

mit einer Ausnahmemenge $A \subseteq X$, welche ganz in $X^\times$ liegt.

Bemerkung:

Sei $\nu\colon X_1 \to X$ eine Normalisierung mit Ausnahmemengen $A_1 \subseteq X_1$ und $A \subseteq X^\times$.

Dann ist

$\nu | X_1^- \setminus A_1 \to X^-$ biholomorph,

insbesondere kann man annehmen, daß $A = X^\times$ ist

(man beachte nur noch, daß

$X_1^- \setminus A_1 = X_1 \setminus (A_1 \cup X_1^\times)$ und

$A_1 \cup X_1^\times$ nirgends dicht liegt in X_1).

Dazu überlegen wir uns,

daß 1) $(\nu | X_1 \setminus A_1 \to X\setminus A)^{-1}(X^-) = X_1 \setminus (A_1 \cup \nu^{-1}(X^\times))$ und

2) $A_1 \cup \nu^{-1}(X^\times) = A_1 \cup X_1^\times$.

zu 1): Zunächst ist (wegen $A \subseteq X^\times$) $X^- \subseteq X\setminus A$.

$$\begin{aligned}(\nu | X_1\setminus A_1 \to X\setminus A)^{-1}(X^-) &= \nu^{-1}(X\setminus X^\times) \cap (X_1\setminus A_1)\\ &\underset{\nu \text{ surjektiv}}{=} (X_1\setminus\nu^{-1}(X^\times)) \cap (X_1\setminus A_1)\\ &= X_1\setminus(A_1 \cup \nu^{-1}(X^\times))\ .\end{aligned}$$

zu 2):
$$A_1 \cup \nu^{-1}(X^\times) = \underbrace{A_1 \cup \underbrace{(\nu^{-1}(X^\times)\cap A_1)}_{\subseteq A_1}}_{= A_1} \cup \underbrace{(\nu^{-1}(X^\times) \cap \underbrace{(X_1\setminus A_1)}_{\subseteq \nu^{-1}(X\setminus A)})}_{\substack{= \nu^{-1}(X^\times\setminus A)\cap(X_1\setminus A_1)\\ = (\nu|X_1\setminus A_1 \to X\setminus A)^{-1}(X^\times\setminus A)\\ = X_1^\times\setminus A_1}}$$
$$= A_1 \cup X_1^\times$$

Es ist sogar $X_1^-\setminus A_1 = \nu^{-1}(X^-)$, d.h. ν bildet über X^- biholomorph ab; das werden wir in Korollar 7.5. aus 7.4. folgern. (Aus 8.5.4. wird sich diese Aussage übrigens erneut ganz von selbst ergeben.)

Wir haben in 7.1. "lokale Normalisierungen" zu komplexen Räumen angegeben. Um diese zu einer Normalisierung verheften zu können, zeigen wir jetzt, daß diese lokalen Normalisierungen bis auf Kartenwechsel eindeutig bestimmt sind; bei dieser Gelegenheit können wir gleich zeigen, daß Normalisierungen im eben definierten Sinne bis auf biholomorphe Äquivalenz eindeutig bestimmt sind:

• 7.4. Eindeutigkeitssatz

Vor.: Sei X ein komplexer Raum und seien $\nu_i: X_i \to X$ $(i=1,2)$ Normalisierungen von X.

Beh.: $\nu_1 = \nu_2 \circ f$ für eine biholomorphe Abbildung $f: X_1 \to X_2$.

Beweis:

Es seien

$\nu_i | X_i \setminus A_i \to X^-$ biholomorph

(A_i nirgends dichte, analytische Mengen in X_i)

Wir definieren zunächst

$$f := (\nu_2 | X_2 \setminus A_2 \to X^-)^{-1} \circ (\nu_1 | X_1 \setminus A_1 \to X^-)$$

Dann ist

$f: X_1 \setminus A_1 \to X_2 \setminus A_2$ eine biholomorphe Abbildung und

$\nu_1 | X_1 \setminus A_1 \to X^- = (\nu_2 | X_2 \setminus A_2 \to X^-) \circ f$

Sei $x_1 \in A_1$.

Wir wollen f in x_1 mit Werten in X_2 holomorph fortsetzen.

(Dann sind wir fertig, denn:

Dann läßt sich f in jeden Punkt $x_1 \in A_1$ mit Werten in X_2 holomorph fortsetzen. Da $X_1 \setminus A_1$ dicht liegt in X_1, sind diese Fortsetzungen eindeutig bestimmt und liefern eine holomorphe Fortsetzung von f in ganz X_1. Aus Symmetriegründen ist f^{-1} in ganz X_2 holomorph fortsetzbar. Da $X_i \setminus A_i$ dicht liegen in X_i $(i=1,2)$ folgert man daraus der Reihe nach:

f besitzt eine *biholomorphe* Fortsetzung $f: X_1 \to X_2$ mit der Eigenschaft $\nu_1 = \nu_2 \circ f$)

Sei $\nu_2^{-1}(\nu_1(x_1)) = \{y^{(1)}, \dots, y^{(k)}\}$

und seien $U^{(1)}, \dots, U^{(k)}$ beschränkte, paarweise disjunkte Kartenumgebungen von $y^{(1)}, \dots, y^{(k)}$.

$\varphi^{(i)}: U^{(i)} \to \mathbb{C}^{n-1}$ (n-1 geeignet) seien holomorphe Einbettungen mit beschränkten Bildern.

Dann setzen wir

$U_2 := U^{(1)} \cup \ldots \cup U^{(k)}$ und

$\varphi\colon U_2 \to \mathbb{C}^n \quad , \varphi|U^{(i)} := (\varphi^{(i)}, i).$

Dann ist φ eine holomorphe Einbettung mit beschränktem Bild.

In U_2 gibt es

eine Umgebung U_2' von $\nu_2^{-1}(\nu_1(x_1))$ mit $\overline{\varphi(U_2')} \subseteq \varphi(U_2)$

[$\varphi(U_2)$ ist lokalabgeschlossen, also abgeschlossen in einer offenen Menge $V \subseteq \mathbb{C}^n$:

$\overline{\varphi(U_2)} \cap V = \varphi(U_2)$ für eine offene Umgebung V von $\varphi(U_2)$.

Wegen $\varphi(\nu_2^{-1}(\nu_1(x_1))) \subseteq \varphi(U_2) \subseteq V$ ist V eine offene Umgebung von $\varphi(\nu_2^{-1}(\nu_1(x_1)))$; mithin gibt es eine offene Umgebung V' von $\varphi(\nu_2^{-1}(\nu_1(x_1)))$ in $\mathbb{C}^n$, deren Abschluß noch ganz in V liegt:

$\varphi(\nu_2^{-1}(\nu_1(x_1))) \subseteq V' \subseteq \overline{V'} \subseteq V$

Nun setze man

$U_2' := \varphi^{-1}(\varphi(U_2) \cap V')$, eine offene Umgebung von $\nu_2^{-1}(\nu_1(x_1))$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\overline{\varphi(U_2')} &= \overline{\varphi(\varphi^{-1}(\varphi(U_2) \cap V'))}\\ &= \overline{\varphi(U_2) \cap V'}\\ &\subseteq \overline{\varphi(U_2)} \cap \overline{V'}\\ &\subseteq \overline{\varphi(U_2)} \cap V = \varphi(U_2)\end{aligned}$$
]

Weiter gibt es

eine Umgebung U_1 von x_1 mit $f(U_1 \setminus A_1) \subseteq U_2'$

[Da ν_2 eigentlich und daher abgeschlossen ist, gilt (das ist wieder der bereits in Bemerkung 1) zu 2.2. zitierte topologische Hilfssatz von STEIN):

$\nu_2^{-1}(U) \subseteq U_2'$ für eine Umgebung U von $\nu(x_1)$.

Da ν_1 stetig ist, gilt

$\nu_1(U_1) \subseteq U$ für eine Umgebung U_1 von x_1.

Zusammen:

$\nu_2^{-1}(\nu_1(U_1)) \subseteq (\nu_2^{-1}(U) \subseteq)\ U_2'$

$\Rightarrow f(U_1 \setminus A_1) \subseteq U_2'$
]

Also können wir definieren

$f' := \varphi \circ (f|U_1\setminus A_1 \to U_2) : U_1\setminus A_1 \to \mathbb{C}^n.$

Natürlich ist f' holomorph.

Wegen $f'(U_1\setminus A_1) \subseteq \varphi(U_2)$ ist f' auch beschränkt.

Mithin wird f' repräsentiert durch n beschränkte holomorphe Funktionen:

$$f' = \begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_n' \end{pmatrix} ,$$

wobei $f_i'\colon U_1\setminus A_1 \to \mathbb{C}$ beschränkte holomorphe Funktionen sind.

Da $U_1 \cap A_1$ eine nirgends dichte analytische Menge in U_1 ist, sind dann sogar alle f_i' schwach holomorph in U_1.

Da U_1 nach Definition nur normale Punkte enthält, sind dann alle f_i' holomorph in ganz U_1 fortsetzbar.

Das liefert eine holomorphe Fortsetzung von f' auf ganz U_1:

$f'\colon U_1 \to \mathbb{C}^n.$

Dadurch wiederum haben wir f holomorph erweitert in eine Umgebung von x_1:

$f|U_1 := (\varphi|U_2 \to \varphi(U_2))^{-1} \circ (f'|U_1 \to \varphi(U_2))$

⌈Man beachte dazu:

$$\begin{aligned} f'(U_1) &= f'(\overline{U_1\setminus A_1}^{U_1}) \\ &\subseteq \overline{f'(U_1\setminus A_1)} \quad \text{f': } U_1 \to \mathbb{C}^n \text{ stetig} \\ &= \overline{\varphi(f(U_1\setminus A_1))} \\ &\subseteq \overline{\varphi(U_2')} \\ &\subseteq \varphi(U_2) \end{aligned}$$
⌊

Bemerkung: Im wesentlichen wurde hier folgendes bewiesen:

Eine eigentliche Modifikation (mit endlichen Fasern)

$\rho\colon X_1 \to X_2$

zwischen *normalen* komplexen Räumen X_1 und X_2

ist bereits eine *biholomorphe* Abbildung.

Diese Aussage ist gar nicht verwunderlich, liegt doch der Definition "eigentlicher Modifikation" auch die Absicht zugrunde, normale komplexe Räume unter einem Normalisierungsprozess funktionentheoretisch nicht zu verändern.

• 7.5. Korollar

Vor.: Sei X ein komplexer Raum und
sei $\nu\colon X_1 \to X$ eine Normalisierung von X

Beh.: $\nu|\nu^{-1}(X^-) \to X^-$ ist biholomorph und
$\nu^{-1}(X^-)$ enthält nur gewöhnliche Punkte von X_1 und
liegt dicht in X_1

Beweis:

Nach 7.3. gibt es
eine nirgends dichte analytische Menge A_1 in X_1, so daß
$\nu|X_1^-\setminus A_1 \to X^-$ biholomorph ist.

Weiterhin ist wenigstens
$\nu|\nu^{-1}(X^-) \to X^-$ eine eigentliche Modifikation
[Es liegt ja
$X_1^-\setminus A_1$ dicht *in* $\nu^{-1}(X^-)$

Wir betrachten nun das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\nu^{-1}(X^-) \arrow[rr, dashed, "\rho"] \arrow[dr, "\substack{\nu|\ldots\\ \text{eigentl. Mod.}}"'] & & X_1^-\setminus A_1 \arrow[dl, "\substack{\nu|\ldots\\ \text{biholomorph}}"] \\
& X^- &
\end{tikzcd}$$

Die Abbildung
$$\rho := (\nu|X_1^-\setminus A_1 \to X^-)^{-1} \circ (\nu|\nu^{-1}(X^-) \to X^-) : \nu^{-1}(X^-) \to X_1^-\setminus A_1$$
ist eine eigentliche Modifikation und
$$\rho|X_1^-\setminus A_1 = \mathrm{Id}_{X_1^-\setminus A_1}\ .$$

Dann ist wegen der Bemerkung zu 7.4.
$\rho\colon \nu^{-1}(X^-) \to X_1^-\setminus A_1$ biholomorph
und folglich
$\nu^{-1}(X^-) = X_1^-\setminus A_1$. q.e.d.

Wir bereiten nun die Verheftung der lokalen Normalisierungen vor mit einer allgemeinen Aussage über die Konstruktion komplexer Räume durch Verheften von vorgegebenen Karten; wir werden dazu allerdings unseren bisher benutzten

Begriff des komplexen Raumes etwas einschränken:

• 7.6. Bemerkungen zur Konstruktion komplexer Räume

(1) *Abmachung*

Die in allen weiteren Überlegungen der Abschnitte 7 und 8 auftretenden komplexen Räume X sollen folgende zusätzliche Eigenschaft haben:

Es gibt eine höchstens abzählbare Menge von Karten von X, deren Definitionsbereiche ganz X überdecken.

Lokalanalytische Mengen in einem $\mathbb{C}^n$ sind dann auf alle Fälle auch komplexe Räume in dem jetzt eingeschränkten Sinne.

(2) Durch die obige Einschränkung des Begriffs des komplexen Raumes erhält folgende Aussage über eine "normale Ausschöpfung" komplexer Räume durch Karten Gültigkeit:

(2.1) Jeder komplexe Raum läßt sich durch eine höchstens abzählbare Menge von *relativkompakten* Karten (gemeint sind natürlich Definitionsbereiche von Karten!) überdecken, deren Abschlüsse ein *lokalendliches* System bilden.

Man kann es überdies so einrichten, daß die Abschlüsse dieser Karten ganz in Karten einer *beliebig vorgegebenen* Überdeckung des komplexen Raumes durch höchstens abzählbar viele Karten liegen.

(vgl. [WH] Chap. 5 Sec. 1 Lemma 1P S. 142)

(2.2) In jedem komplexen Raum X gibt es

eine Folge $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ kompakter Mengen $K_j \subseteq X$ mit: $K_j \subseteq \mathring{K}_{j+1}$

und $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathring{K}_j$

(vgl. [WH] Chap. 5 Sec. 1 Lemma 1N S. 142)
(Diese Aussage werden wir nur im nächsten Abschnitt 8 brauchen.)

(3) Wir geben nun an, wie man einen komplexen Raum aus abzählbar vielen lokalanalytischen Mengen bei vorgegebenen Kartenwechseln zusammenheften kann.
Es seien X_i $(i \in \mathbb{N})$ höchstens abzählbar viele, paarweise disjunkte lokalanalytische Mengen in gewissen Räumen $\mathbb{C}^{n_i}$.
Weiter sei für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine Folge $(X_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ offener "Überlappungs"mengen $X_{i,j} \subseteq X_i$ gegeben
und für jedes Paar $i,j \in \mathbb{N}$ ein biholomorpher "Kartenwechsel"

$$\varphi_{i,j}: X_{i,j} \to X_{j,i}.$$

(3.1) Dann heißt

$$((X_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}, (\varphi_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}})$$

ein *Verheftungsdatum* (für einen komplexen Raum), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) $X_{ii} = X_i$ und $\varphi_{i,i} = \mathrm{Id}_{X_i}$ $\forall\, i \in \mathbb{N}$

b) "Transitivität des Verheftungsdatums":
Für alle $i,j,k \in \mathbb{N}$ gilt
$\varphi_{i,j}(X_{i,j} \cap X_{i,k}) \subseteq X_{j,k}$

$\varphi_{j,k} \circ \varphi_{i,j} = \varphi_{i,k}$ (selbstverständliche Beschränkungen wurden weggelassen!)

c) "HAUSDORFF-Bedingung":

$\forall\, x_i \in X_i \setminus X_{i,j}$, $x_j \in X_j \setminus X_{j,i}$

$\exists\, U(x_k)$ Umgebung von x_k in X_k $(k = i,j)$

mit $U(x_i) \cap \varphi_{j,i}(U(x_j) \cap X_{j,i}) = \emptyset$

(3.2) Für ein solches Verheftungsdatum gilt:
Es gibt einen komplexen Raum X
mit einer offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$
und biholomorphen Abbildungen $\varphi_i\colon U_i \to X_i$ $(i \in \mathbb{N})$,
so daß für alle $i,j \in \mathbb{N}$ gilt

$\varphi_i(U_i \cap U_j) = X_{i,j}$ und

$(\varphi_j | U_i \cap U_j \to X_{j,i}) \circ (\varphi_i | U_i \cap U_j \to X_{i,j})^{-1} = \varphi_{i,j}$

Beweis:
Wir geben nur kurz die notwendigen Definitionen an:

Für alle $x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$ sei

$$[x] := \begin{cases} \{x\} & \text{, falls } x \notin X_{i,j} \quad \forall\, i,j \\ \{x\} \cup \{\varphi_{i,j}(x) \mid i,j \text{ mit } x \in X_{i,j}\} & \text{, sonst} \end{cases}$$

$$X := \{[x] \mid x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i\}$$

Wir definieren eine Basis für eine Topologie auf X durch

$\{[U] \mid U \text{ Umgebung von } x \text{ in } X_i,\ x \in X_i,\ i \in \mathbb{N}\}$

$U_i := [X_i]$,

$\varphi_i([x]) := x \quad \forall\, x \in X, \quad i \in \mathbb{N}$

(vgl. auch [WH] Chap. 5 Sec. 2 Theorem 2F S. 146)

• 7.7. Der Normalisierungssatz von OKA

Vor.: Sei X ein komplexer Raum (im Sinne von 7.6,(1))

Beh.: Es gibt eine

und bis auf biholomorphe Äquivalenz *nur* eine

Normalisierung (im Sinne von 7.3) $\nu: X_1 \to X$

Beweis:

Die Existenzaussage ergibt sich jetzt ganz leicht durch Verheften geeigneter lokaler Normalisierungen:

Nach dem lokalen Normalisierungssatz 7.1.

gibt es zu jedem Punkt $x \in X$

eine Kartenumgebung X_x in X und eine Normalisierung $\nu_x: X_{x,1} \to X_x$.

($X_{x,1} \subseteq \mathbb{C}^{n_x}$ lokalanalytisch)

O.B.d.A. seien die X_x relativ-kompakt.

Wir wählen (gemäß dem ersten Teil von 7.6.(2.1))

eine höchstens abzählbare Menge $X_2, X_3, \ldots$ solcher Kartenumgebungen X_x, die ganz X überdecken.

Die zugehörigen Normalisierungen mögen $\nu_i: X_{i,1} \to X_i$ $(i \geq 2)$ heißen

($X_{i,1} \subseteq \mathbb{C}^{n_i}$ lokalanalytisch)

[Nach 7.6(2.1) gibt es zunächst mal

eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von X durch relativ kompakte Mengen $U_i \subseteq X$.

Dann läßt sich jedes $\overline{U_i}$ durch endlich viele X_x überdecken.

Die abzählbare Vereinigung endlicher Mengen ist freilich wieder abzählbar.]

o.B.d.A. seien die $X_{i,1}$ paarweise disjunkt.

Nun setzen wir

$$X_{i,j,1} := \nu_i^{-1}(X_i \cap X_j) \quad \forall\, i,j$$

Wegen der Eindeutigkeitsaussage 7.4. gibt es zu jedem Paar i,j , für welches $X_i \cap X_j$ nicht leer ist

eine biholomorphe Abbildung $\varphi_{i,j}: X_{i,j,1} \to X_{j,i,1}$

mit $(\nu_i | X_{i,j,1} \to X_i \cap X_j) = (\nu_j | X_{j,i,1} \to X_i \cap X_j) \circ \varphi_{i,j}$

Man beachte nur, daß

$$\nu_i | X_{i,j,1} \to X_i \cap X_j \quad \text{und}$$

$$\nu_j | X_{j,i,1} \to X_i \cap X_j$$

zwei Normalisierungen von $X_i \cap X_j$ sind

Falls $X_i \cap X_j = \emptyset$ ist, sei $\varphi_{i,j} : \emptyset \to \emptyset$.

Nun ist

$((X_{i,j,1})_{i,j}\,,\ (\varphi_{i,j})_{i,j})$ ein Verheftungsdatum (im Sinne von 7.6(3.1))

Wir weisen die Axiome von 7.6(3.1) kurz nach:

zu a):

$$X_{i,j,1} = \nu_i^{-1}(X_i) = X_{i,1}$$

$$\nu_i = \nu_i \circ \varphi_{i,i} \Rightarrow \varphi_{i,i} = \mathrm{Id}_{X_{i,1}}$$

(da ν_i als eigentliche Modifikation zwischen gewissen dichten Teilmengen von $X_{i,1}$ und X_i bijektiv abbildet und $\varphi_{i,i}$ stetig ist)

zu b):

Vorweg stellen wir fest:

$$\left.\begin{array}{l} (\nu_i | \ldots) = (\nu_j | \ldots) \circ \varphi_{i,j} \\[1em] (\nu_i | \ldots) = (\nu_j | \ldots) \circ \varphi_{j,i}^{-1} \end{array}\right\rangle \ \varphi_{i,j} = \varphi_{j,i}^{-1}$$

(Begründung wie eben in a))

Seien nun $i,j,k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j}(X_{i,j,1} \cap X_{i,k,1}) &= \varphi_{i,j}(\nu_i^{-1}(X_i \cap X_j \cap X_k)) \\ &= (\nu_i \circ \varphi_{j,i})^{-1}(X_i \cap X_j \cap X_k) \\ &= \nu_j^{-1}(X_i \cap X_j \cap X_k) \\ &\subseteq X_{j,k,1} \ . \end{aligned}$$

$$\nu_k \circ \varphi_{j,k} \circ \varphi_{i,j} = \nu_j \circ \varphi_{i,j} = \nu_i = \nu_k \circ \varphi_{i,k} \Rightarrow \varphi_{j,k} \circ \varphi_{i,j} = \varphi_{i,k}$$

(Begründung wie in a))

(Beschränkungsabbildungen wurden dabei wiederum nicht mitangeschrieben)

zu c):

Sei $x_{i,1} \in X_{i,1} \setminus X_{i,j,1}$, $x_{j,1} \in X_{j,1} \setminus X_{j,i,1}$.

Man betrachte nun

$x_i := \nu_i(x_{i,1}) \in X_i \setminus X_j$ und

(Man beachte die Definition der $X_{k,l,1}$!)

$x_j := \nu_j(x_{j,1}) \in X_j \setminus X_i$

Es sind also x_i und x_j *verschiedene* Punkte von X_i bzw. X_j.

Da X ein T_2- Raum ist, gibt es dann in X disjunkte Umgebungen $U(x_i) \subseteq X_i$, $U(x_j) \subseteq X_j$.

Nun setze man

$$U(x_{i,1}) := \nu_i^{-1}(U(x_i)),$$

$$U(x_{j,1}) := \nu_j^{-1}(U(x_j)).$$

Das sind Umgebungen von $x_{i,1}$ bzw. $x_{j,1}$ und es gilt:

$$\begin{aligned} \varphi_{j,i}(U(x_{j,i}) \cap X_{j,i,1}) &= \varphi_{j,i}(\nu_j^{-1}(U(x_j) \cap X_i)) \\ &= (\nu_j \circ \varphi_{i,j})^{-1}(U(x_j) \cap X_i) \\ &= \nu_i^{-1}(U(x_j) \cap X_i) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad (U(x_{i,1}) \cap \varphi_{j,i}(U(x_{j,1}) \cap X_{j,i,1}) = \nu_i^{-1}(U(x_i) \cap U(x_j)) = \emptyset$$

Nach 7.6 (3.2) gibt es nun einen komplexen Raum X_1 mit einer offenen Überdeckung $(U_{i,1})_{i\geq 2}$ und biholomorphen Abbildungen $\varphi_i: U_{i,1} \to X_{i,1}$ $(i \geq 2)$,

so daß für alle $i,j \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(\nu_i \circ \varphi_i)(U_{i,1} \cap U_{j,1}) = X_i \cap X_j \quad \text{und}$$

$$(\nu_j \circ \varphi_j)(U_{i,1} \cap U_{j,1} \to X_i \cap X_j) = (\nu_i \circ \varphi_i \mid U_{i,1} \cap U_{j,1} \to X_i \cap X_j)$$

Dann ist natürlich X_1 (mit den $X_{i,1}$) ein *normaler* komplexer Raum.

Wir definieren nun $\nu: X_1 \to X$ durch

$\nu | U_{i,1} := \nu_i \circ \varphi_i \quad \forall\, i \geq 2$

Dann ist sicher $\nu\colon X_1 \to X$ eine wohldefinierte holomorphe Abbildung.

ν ist auch eigentlich.

[Sei $K \subseteq X$ kompakt.

Anwendung von 7.6 (2.1) auf das System $(X_i)_{i\geq 2}$ liefert

eine lokalendliche Überdeckung $(C_k)_{k\in \mathbb{N}}$ von X,

so daß jedes C_k kompakt ist und

jedes C_k ganz in einem X_i liegt.

Sei C_i' die Vereinigung derjenigen C_k, welche ganz in X_i liegen $(i \geq 2)$.

Dann ist

C_i' kompakt $\forall\, i$

(Als Vereinigung eines *lokalendlichen* Systems abgeschlossener Mengen ist C_i' sicher abgeschlossen.

$C_i' \subseteq X_i \subseteq \overline{X_i}$ und $\overline{X_i}$ ist kompakt nach Konstruktion.)

Sei nun

$K_i := K \cap C_i' \quad \forall\, i$.

Da K als Kompaktum von endlich vielen X_i überdeckt wird,

gibt es ein $n \geq 2$ mit

$$K = \bigcup_{i=2}^{n} K_i \quad , \text{ wobei } K_j \subseteq X_j \text{ kompakt ist } \quad \forall\, j .$$

Nun ist aber

$$\nu^{-1}(K) = \bigcup_{i=2}^{n} (\nu_i \circ \varphi_i)^{-1}(K_i)$$

$$= \bigcup_{i=2}^{n} \varphi_i^{-1}\underbrace{(\nu_i^{-1}(K_i))}_{\text{kompakt}} \qquad \text{kompakt}$$

]

Alle anderen Eigenschaften einer Normalisierung erbt ν ganz selbstverständlich von den ν_i. (Man beachte dazu 7.5.)

Daher ist $\nu\colon X_1 \to X$ eine Normalisierung.

8. Einige Beispiele zur Normalisierung

Wir wollen in diesem Abschnitt im wesentlichen vorführen, wie man den Normalisierungssatz (Existenz- und Eindeutigkeitsaussage) einsetzen kann, um funktionentheoretische Problemstellungen zu vereinfachen, das heißt hier: auf normale komplexe Räume zurückzuführen. Um die fundamentale Wichtigkeit des Normalisierungssatzes in der Funktionentheorie zu unterstreichen, wollen wir auch einige Dinge behandeln, die nicht gerade an der Oberfläche liegen. Allerdings können wir dann oft nur den Beweisteil ausführen, der sich auf den Normalisierungssatz stützt; vieles werden wir nur unbewiesen zitieren können, um den Rahmen der Arbeit nicht zu sprengen.
Etwas abseits von diesem Vorhaben steht die vollständige und elementare Durchrechnung eines einfachen numerischen Beispiels in Punkt 8.2.4.: die NEIL'sche Parabel. Wir wollen an diesem Beispiel nochmals die Methoden demonstrieren, mit denen wir den Normalisierungssatz bewiesen haben. Gerade an der angegebenen Stelle fügt sich ein solches Beispiel recht natürlich ein.

•• 8.1. Historischer Ausgangspunkt des Normalisierungsbegriffes: die Auflösung von Singularitäten 1-dimensionaler komplexer Räume

• 8.1.1. Satz

- Auflösung von Singularitäten 1-dimensionaler komplexer Räume -

Vor.: Sei X ein *rein 1-dimensionaler* komplexer Raum

Beh.: Es gibt einen singularitätenfreien komplexen Raum X_1 und eine eigentliche Modifikation $\rho: X_1 \to X$.

Bemerkung: Mit X ist auch X_1 wieder rein 1-dimensional (wir werden in 8.5.2. den einfachen Beweis nachtragen).
Falls X irreduzibel ist, ist X_1 zusammenhängend (vgl. dazu weiter unten 8.2.3,(3)).
Also gibt es zu jedem 1-dimensionalen *irreduziblen* komplexen Raum X eine RIEMANN'sche Fläche X_1 und eine eigentliche Modifikation $\rho: X_1 \to X$.

Beweis:
Sei $\rho: X_1 \to X$ die Normalisierung von X.
Wegen der Normalität von X_1 ist nach dem Dimensionssatz 4.2.

$$\dim X_1^{\times} \leq \dim X_1 - 2 = -1$$

$$\Rightarrow \quad X_1^{\times} = \emptyset.$$

• 8.1.2. Bemerkung.

Man nennt eine eigentliche Modifikation $\rho: X_1 \to X$, wo X_1 ein *singularitätenfreier* komplexer Raum ist, eine "Auflösung der Singularitäten von X".
In 8.1.1. haben wir gesehen, daß sich die Singularitäten rein 1-dimensionaler komplexer Räume auflösen lassen: die Normalisierung ist hier eine Auflösung der Singularitäten.
Eben zum Zweck der Auflösung von Singularitäten algebraischer Varietäten wurden von ZARISKI 1939 die Begriffe der normalen algebraischen Varietät und der Normalisierung einer algebraischen Varietät geprägt.
Das allgemeine Problem der Auflösung von Singularitäten komplexer Räume ist weit davon entfernt gelöst zu sein.
Für 2-dimensionale komplexe Räume gibt es noch ein allgemeines Verfahren zur Auflösung der Singularitäten:

HIRZEBRUCH, F.: Über vierdimensionale RIEMANN'sche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. Math. Ann. 126, 1 - 22 (1953)

Die Auflösung der Singularitäten 3-dimensionaler komplexer Räume wird von KUHLMANN in seiner Habilitationsschrift behandelt:

KUHLMANN, N.: Über die Auflösung der Singularitäten 3-dimensionaler komplexer Räume.
Teil I: Math. Ann. 151, 304 - 331 (1963)
Teil II: Math. Ann. 154, 387 - 405 (1964)

Noch allgemeinere Sätze wurden von HIRONAKA bewiesen:

HIRONAKA, H.: Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero
Teil I: Ann. of Math. (2) 79, 109 - 203 (1964)
Teil II: Ann. of Math. (2) 79, 205 - 326 (1964)

Methoden HIRONAKA's werden auch beschrieben in

HERRMANN, M., SCHMIDT, R. und VOGEL, W.: Theorie der normalen Flachheit, Teubner, Leipzig 1977.
Insbesondere: Kapitel III §2 (S. 151)

•• 8.2. Beispiele zur Übertragung von Eigenschaften einer analytischen Menge auf ihre Normalisierung.

BEHNKE und STEIN einerseits und CARTAN andererseits haben 1951 den Begriff des (in der heutigen Nomenklatur) normalen komplexen Raumes eingeführt. Wir wissen freilich, daß nicht einmal alle analytischen Mengen normale komplexe Räume sind. Es war jedoch damals bereits die Existenz komplexer Überlagerungsräume (in der heutigen Sprache: die Existenz von Normalisierungen) zu analytischen Mengen bekannt; wenigstens im Prinzip war die Existenz komplexer Überlagerungsräume schon WEIERSTRASS bekannt. Mit Hilfe der Normalisierung ließ sich daher die Funktionentheorie von normalen komplexen Räumen auf beliebige analytische Mengen übertragen. Wir wollen hier einige Beispiele zur Übertragung von Begriffen angeben. Wir bringen vorweg einen Hilfssatz, den man eigentlich längst erwartet hätte:

• 8.2.1. Lemma

Vor.: Sei X ein komplexer Raum, $x \in X$.

X sei in x irreduzibel

$f\colon X^- \to \mathbb{C}$ sei eine schwach holomorphe Funktion auf X

Beh.: f läßt sich stetig in $X^- \cup \{x\}$ fortsetzen.

Beweis:
Wir wollen im wesentlichen nur die Beweisidee angeben; die Ausführung des Beweises ist dann klar.

Nach Satz 1.13. erfüllt

$(f)_x \in \mathcal{M}_x$ eine ganze Gleichung mit Koeffizienten in $\mathcal{O}_x$.

Also gibt es in einer geeigneten offenen Umgebung U von x in X ein normiertes Polynom $p \in \mathcal{O}(U)[\vartheta]$ mit $p(f) = 0$ (in U^-)

(Man vergleiche dieselbe Argumentation in 2.2. Beweisteil (1).)

Nun benutzen wir die bekannte Tatsache, daß die Wurzeln eines normierten Polynoms stetig von seinen Koeffizienten abhängen:

Seien $x_1,\dots,x_r$ die verschiedenen Wurzeln der Gleichung $p(x)(\vartheta) = 0$ und seien $U_1,\dots,U_r$ disjunkte offene Umgebungen von $x_1,\dots,x_r$ in $\mathbb{C}$.
Dann kann man U so verkleinern, daß

alle Wurzeln der Gleichung $p(x')(\vartheta) = 0$ für alle $x' \in U$ in $U_1 \cup \dots \cup U_r$ liegen.

Da X irreduzibel ist in x, kann man U irreduzibel wählen; dann ist

U^- zusammenhängend
(vgl. [WH] Chap. 3 Sec. 1 Theorem 1H S. 76).

Dann ist auch $f(U^-)$ zusammenhängend, also ganz in *einem* der U_i gelegen:

$f(U^-) \subseteq U_{i_0}$.

Nun wird f in x stetig fortgesetzt durch die Festsetzung

$f(x) := x_{i_0}$.

• 8.2.2. Korollar

Vor.: Sei X ein komplexer Raum, $\nu: X_1 \to X$ seine Normalisierung.
$x \in X$.

Beh.: Folgende Aussagen sind gleichwertig:

(i) X ist (lokal) irreduzibel in x.

(ii) Für jeden schwach holomorphen Funktionskeim $(f)_x \in \mathcal{O}_x$' läßt sich $f \in (f)_x$ stetig in x fortsetzen.

(iii) $\nu^{-1}: X^- \to X_1$ läßt sich stetig in x fortsetzen.
(ν^{-1} ist dabei natürlich die auf X^- sicher definierte Umkehrung einer geeigneten Restriktion von ν.)

(iv) $\nu^{-1}(x)$ besteht aus nur *einem* Punkt.

Beweis:
Wir beweisen die Aussagen zyklisch:

"(i) $\Rightarrow$ (ii)" Lemma 8.2.1.

"(ii) $\Rightarrow$ (iii)"
Da unser Fortsetzungsproblem lokal ist, können wir o.B.d.A. annehmen, daß $X_1 \subseteq \mathbb{C}^n$ eine lokalanalytische Menge ist.
[Sei $\nu^{-1}(x) = \{x_1,\dots,x_r\}$ und
seien $U(x_1),\dots,U(x_r)$ paarweise disjunkte Kartenumgebungen von $x_1,\dots,x_r$.
Dann gibt es nach einem (in Bemerkung 1) zu 2.2. zitierten) topologischen Hilfssatz von STEIN
eine Umgebung U von x mit $\nu^{-1}(U) \subseteq U(x_1) \cup \dots \cup U(x_r)$.
Nun betrachte man statt ν die Einschränkung
$\nu|\nu^{-1}(U) \to U$.]

Wir betrachten nun ν^{-1} als Abbildung

$$\nu^{-1}: X^- \to (X_1 \hookrightarrow)\ \mathbb{C}^n,$$

$$\nu^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}.$$

Da ν eigentlich ist, sind alle

$\mu_i: X^- \to \mathbb{C}$ schwach holomorph in X.

Also lassen sich nach (ii) alle μ_i und damit auch ν^{-1} stetig in x

fortsetzen:

$\nu^{-1}: X^- \cup \{x\} \to \mathbb{C}^n$ stetig.

Dann ist sogar das volle Urbild von x unter ν, also $\nu^{-1}(x)$ gleich $\{\nu^{-1}(x)\}$.

(Insbesondere $\nu^{-1}(x) \in X_1$)

⌈Sei $x_1 \in \nu^{-1}(x)$ beliebig vorgegeben,

also $x = \nu(x_1)$.

A_1 sei die zu ν gehörige Ausnahmemenge in X_1, also

$\nu: X_1 \setminus A_1 \to X^-$ biholomorph

Sei nun $x_1 = \lim_i x_1^{(i)}$ mit $x_1^{(i)} \in X_1 \setminus A_1 \quad \forall i$.

Da ν stetig ist, gilt

$x = \nu(x_1) = \lim_i \nu(x_1^{(i)})$.

Da $\nu^{-1}: X^- \cup \{x\} \to \mathbb{C}^n$ stetig ist, folgt weiter

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def.}}}{x_1 =} \lim_i x_1^{(i)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } x_1^{(i)} \in X_1\setminus A_1 \ \forall i}}{=} \lim_i \nu^{-1}(\nu(x_1^{(i)})) = \nu^{-1}(x).$$

Zusammen:

$\{\nu^{-1}(x)\} = \nu^{-1}(x) \subseteq X_1$

⌊

"(iii) ⇒ (iv)"

Das haben wir eben mitbewiesen !

"(iv) ⇒ (i)"

Hierzu zeigt man:

X in x reduzibel ⇒ $\nu^{-1}(x)$ besteht aus mehr als einem Punkt.

Zum einen lehrt die Konstruktion lokaler Normalisierungen in 2.4.:

Sei U eine Umgebung von x in X, die in ebensoviele irreduzible Komponenten zerfällt wie $(U)_x$:

$U = U_1 \cup \ldots \cup U_r$ sei die Zerlegung in irreduzible Komponenten und

$(U)_x = (U_1)_x \cup \ldots \cup (U_r)_x$ ebenfalls die Zerlegung in irreduzible Komponenten.

Es seien

$\nu_i: U_{i,1} \to U_i \quad (i = 1,\ldots,r)$ Normalisierungen,

die $U_{i,1}$ seien paarweise disjunkt.

Dann wird durch

$$U_1 := \bigcup_{i=1}^{r} U_{i,1},$$

$$\nu' \colon U_1 \to U \quad , \quad \nu' | U_{i,1} := \nu_i \qquad (i = 1,\dots,r)$$

eine Normalisierung von U erklärt.

Es ist $\mathrm{Card}\ \nu'^{-1}(x) \geq r > 1$

(Anmerkung: Da wir "(i) $\Rightarrow$ (iv)" bereits bewiesen haben, wissen wir sogar:

$$\mathrm{Card}\ \nu'^{-1}(x) = r.$$

Das werden wir in 8.2.3. nochmals verwenden.)

Zum anderen ist auch $\nu | \nu^{-1}(U) \to U$ eine Normalisierung und es lehrt die Eindeutigkeitsaussage 7.4.:

$(\nu | \nu^{-1}(U) \to U) = \nu' \circ f$ für eine biholomorphe Abbildung $f \colon \nu^{-1}(U) \to U_1$.

Also: $\mathrm{Card}\ \nu^{-1}(x) = \mathrm{Card}\ \nu'^{-1}(x) > 1$.

Nun können wir den für uns interessanten Satz formulieren:

• 8.2.3. Satz

Vor.: Sei X ein komplexer Raum, $\nu \colon X_1 \to X$ seine Normalisierung.

Beh.: (1) Ein Punkt $x \in X$ hat genau dann r verschiedene ν-Urbilder in X_1, wenn X in x in r irreduzible Komponenten zerfällt.

(2) Der Raum X_1 wird genau dann durch ν *topologisch* auf X abgebildet, wenn X lokal irreduzibel ist (in allen seinen Punkten).

(3) Der Raum X_1 ist genau dann zusammenhängend, wenn X (global) irreduzibel ist.

Bemerkung:

Daraus folgt insbesondere:

Ein *normaler* komplexer Raum ist genau dann irreduzibel, wenn er zusammenhängend ist. Die irreduziblen Komponenten eines normalen komplexen Raumes sind seine Zusammenhangskomponenten.

Mithin verhält sich ein normaler komplexer Raum bzgl. der Zerlegung in irreduzible Komponenten genauso wie eine Mannigfaltigkeit: analytische und topologische Zerlegung sind gleichwertig.

Man könnte aus (3) sofort den Satz über die globale Zerlegung analytischer Mengen (oder auch komplexer Räume) folgern. Das hat nur den Nachteil, daß dieser Satz in unsere Beweise schon

(mittelbar) hineingesteckt wurde.
Es sei hier jedoch erwähnt, daß man durch "Trennung der Primkeime" einer analytischen Menge wenigstens in einem gewissen topologischen Sinne normalisieren kann und daraus den globalen Zerlegungssatz herleiten kann.

(Wir zitieren die Konstruktion kurz *ohne* Beweise:
Sei $A \subseteq U \subseteq \mathbb{C}^n$, U offen, A analytisch.
Es sei ein Parameterraum P erklärt durch:

$$P := \{\alpha \mid \alpha \text{ analytischer Primkeim in einem Punkt aus } U\}$$

In P wird durch die Angabe einer Basis der offenen Mengen eine Topologie definiert:

Sei B in einer offenen Teilmenge von U analytisch.

$$B_1 := \{\alpha \in P \mid B \in \alpha\}.$$

Die Gesamtheit aller dieser Mengen B_1 ist die Basis einer Topologie auf P.

Es gilt: P ist lokalkompakt und lokal-wegzusammenhängend.
$A_1 \subseteq P$ ist ein offener Unterraum von P.
Man hat eine stetige Projektion $\nu: A_1 \to A$.
Dieses ν heißen wir für den Moment "Normalisierung von A".
Für ν gilt nun die obige Aussage (3) und daraus läßt sich der Satz über die globale Zerlegung analytischer Mengen folgern.)

Die Konstruktion der "Trennung der Primkeime" ist jedoch nicht geeignet die Normalisierung mit *allen* ihren Eigenschaften aufzubauen (man siehe dazu [WH] Chap. 8 Sec. 4 Text zu Theorem 3D, S. 258/259).

Beweis:
(1) Sei $x \in X$ und $(X)_x$ habe gerade r irreduzible Komponenten.
In dieser Situation können wir 8.2.2. Beweisteil "(iv) $\Rightarrow$ (i)" entnehmen:

$$\text{Card } \nu^{-1}(x) = r.$$

Das ist die Behauptung.
(2) *Falls* X lokal irreduzibel ist,
läßt sich $\nu^{-1}: X^- \to X_1$ nach 8.2.2. stetig in jeden Punkt $x \in X$ fortsetzen, d.h. ν ist topologisch.
Falls $\nu: X_1 \to X$ eine topologische Abbildung ist,
also $\nu^{-1}(x)$ einpunktig ist für alle $x \in X$, dann ist nach 8.2.2. X irreduzibel in jedem Punkt $x \in X$.

(3) Wir zeigen:

X reduzibel $\Longleftrightarrow$ X_1 nicht zusammenhängend

"$\Rightarrow$" Sei $X = X^{(1)} \cup X^{(2)}$, $X^{(1)}$ und $X^{(2)}$ echte Teilräume von X.

Seien $\nu_1 : X_1^{(1)} \to X^{(1)}$, $\nu_2 : X_1^{(2)} \to X^{(2)}$ Normalisierungen,

$X_1^{(1)}$ und $X_1^{(2)}$ disjunkt.

Dann wird durch

$$X_1' := X_1^{(1)} \cup X_1^{(2)} \quad \text{und}$$

$$\nu' : X_1' \to X \quad , \quad \nu' | X_1^{(i)} := \nu_i$$

eine Normalisierung von X erklärt.

Es ist X_1' *nicht* zusammenhängend.

Wegen der Eindeutigkeitsaussage 7.4. ist dann auch X_1 *nicht* zusammenhängend.

"$\Leftarrow$" Sei $X_1 = X_1^{(1)} \cup X_1^{(2)}$ eine Zerlegung von X_1 in disjunkte offene Teilräume.

Nach dem REMMERT'schen Abbildungssatz (wir werden diesen Satz in 8.6.2,(4) nochmals genauer zitieren) sind die

$\nu(X_1^{(i)})$ analytisch in X $(i = 1,2)$.

Es ist auch

$$\nu(X_1^{(i)}) \neq X \qquad (i = 1,2)$$

[*Sonst* wäre z.B.

$\nu | X_1^{(1)}$ eine Normalisierung von X,

also nach dem Eindeutigkeitssatz 7.4.

$X_1^{(1)}$ homöomorph zu $X_1^{(1)} \cup X_2^{(1)}$

Widerspruch! ($X_1^{(1)} \cup X_1^{(2)}$ hat mehr Zusammenhangskomponenten als $X_1^{(1)}$)
]

Also ist

$$X = \nu(X_1^{(1)}) \cup \nu(X_1^{(2)}) \text{ eine echte Zerlegung von } X,$$

d.h. X ist reduzibel.

• 8.2.4. Beispiel: Die NEIL'sche Parabel

Wir haben in 1.4. das wohl einfachste Beispiel eines nichtnormalen komplexen Raumes angegeben: die sich kreuzenden komplexen Geraden. Betrachtet man diesen komplexen Raum als Grenzfall zweier aufeinander zuwandernder disjunkter komplexer Geraden, so macht seine nichtnormale Singularität im Nullpunkt einen recht künstlichen Eindruck; die Normalisierung dieses komplexen Raumes schließlich scheint nur dazu gut zu sein, die Grenzlage wieder zu beseitigen. Dennoch war dieser komplexe Raum sehr geeignet, die Ideen zur allgemeinen Konstruktion der Normalisierung zu liefern.

Wir geben nun an dieser Stelle ein Beispiel für einen nichtnormalen, *irreduziblen* Punkt an: der Nullpunkt der NEIL'schen Parabel. Wir wollen dieses Beispiel vollständig und möglichst elementar durchrechnen. Daß wir das nicht schon früher getan haben, hat zwei Gründe: Zum einen sollten die Rechnungen nicht über die ganze Arbeit verstreut werden und zum anderen können wir uns jetzt begrifflich besser ausdrücken.

(0) Die "NEIL'sche Parabel" wird definiert durch

$$X := \{(Z_1,Z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid Z_1^2 = Z_2^3\}.$$

Das ist eine analytische Menge im $\mathbb{C}^2$, also ein komplexer Raum.

(1) Mengentheoretische Betrachtung der NEIL'schen Parabel

Die NEIL'sche Parabel besitzt eine recht einfache Parametrisierung:

$$\Phi\colon \mathbb{C} \ni Z \to (Z^3,Z^2) \in X.$$

Daß Φ bijektiv (also eine Parametrisierung) ist, wird sofort durch die Angabe der Umkehrabbildung gezeigt:

$$\Phi^{-1}\colon X \ni (z_1,z_2) \to \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{, falls } z_2 = 0 \\ \dfrac{z_1}{z_2} & \text{, falls } z_2 \neq 0 \end{array} \right\} \in \mathbb{C}$$

Wir wollen hier noch feststellen, daß sich die Einschränkungen auf X der natürlichen Koordinatenfunktionen des $\mathbb{C}^2$ durch Φ^{-1} ausdrücken lassen:

$$z_1 \underset{\text{Def.}}{=} (pr_1\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C})|X = (\Phi^{-1})^3 \underset{\text{Def.}}{=} \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}^3 \circ \Phi^{-1}$$

$$z_2 \underset{\text{Def.}}{=} (pr_2\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C})|X = (\Phi^{-1})^2 \underset{\text{Def.}}{=} \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}^2 \circ \Phi^{-1}$$

Abmachung: Wir bezeichnen im folgenden

Koordinatenfunktionen sowie Koordinaten im $\mathbb{C}^2$ mit Z_1, Z_2 (groß), ihre Einschränkungen auf X mit z_1, z_2 (klein).

Also: $z_1 = Z_1|X$, $z_2 = Z_2|X$.

Wir werden diese Symbole wie üblich sowohl für Funktionen als auch für ihre Werte verwenden; was jeweils gemeint ist, wird aus dem Zusammenhang von selbst klar.

Umgekehrt sind nun alle Potenzen von Φ^{-1} (d.h. alle Liftungen von Potenzen Z^n vermöge Φ^{-1}) außer Φ^{-1} selbst als Produkte $z_1^{\mu} z_2^{\nu}$ $(\mu, \nu \in \mathbb{N}_0)$ darstellbar; dazu hat man für festes $n \in \mathbb{N}_0$ nur zu beachten:

Die Lösungsmenge der $\mu, \nu \in \mathbb{N}_0$ mit

$$3\mu + 2\nu = n$$

ist gegeben durch:

$$\left.\begin{array}{l} \mu = 2i \\ \nu = \frac{n}{2} - 3i \end{array} \quad \text{mit } i \in \mathbb{N}_0,\ i \le \frac{n}{6} \right\} \textit{ falls } n \text{ gerade}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mu = 2i + 1 \\ \nu = \frac{n-3}{2} - 3i \end{array} \quad \text{mit } i \in \mathbb{N}_0,\ i \le \frac{n-3}{6} \right\} \textit{ falls } n \text{ ungerade}$$

[Man überlegt sich zunächst, daß eine einzelne Lösung (μ_0, ν_0) der Gleichung $3\mu + 2\nu = n$ gegeben ist durch

$$\mu_0 = 0 \ , \quad \nu_0 = \frac{n}{2} \quad , \text{ falls } n \text{ gerade}$$

$$\mu_0 = 1 \ , \quad \nu_0 = \frac{n-3}{2} \quad , \text{ falls } n \text{ ungerade}, \ n \neq 1$$

Daraus berechnet man alle Lösungen (μ, ν) durch den Ansatz

$$3\mu + 2\nu = 3\mu_0 + 2\nu_0 \ , \text{ also}$$

$$\nu = \nu_0 + \frac{3}{2}(\mu_0 - \mu).$$

Es ergibt sich:

$$\begin{array}{lll} \nu \in \mathbb{Z} & \Longleftrightarrow & \mu = \mu_0 + 2i \quad \text{für ein } i \in \mathbb{Z} \\ & \Rightarrow & \nu = \nu_0 - 3i \\ \mu \ge 0 & \Longleftrightarrow & i \ge -\frac{1}{2}\mu_0 \\ \nu \ge 0 & \Longleftrightarrow & i \le \frac{1}{3}\nu_0 \end{array}$$

Einsetzen der Zahlenwerte für μ_0, ν_0 liefert die behauptete Aussage.]

Damit erhält man z.B.

$$(\Phi^{-1})^n = \begin{cases} z_2^{\frac{n}{2}} & \text{, falls } n \in \mathbb{N}_0 \text{ gerade} \\ z_1 z_2^{\frac{n-3}{2}} & \text{, falls } n \in \mathbb{N}_0 \text{ ungerade, } n \neq 1 \end{cases}$$

(2) Topologische Betrachtung der NEIL'schen Parabel

Die NEIL'sche Parabel ist eine topologische Mannigfaltigkeit:

$\Phi: \mathbb{C} \to X$ ist ein Homöomorphismus

⌈Dazu überlegen wir uns,

daß Φ^{-1} im Nullpunkt $0 \in X$ stetig ist.

Sei U eine vorgegebene Umgebung von 0 in $\mathbb{C}$.

Man wähle $\varepsilon > 0$ so, daß

die Kreisscheibe $K_\varepsilon(0)$ um 0 mit Radius ε ganz in U liegt

und setze

$$U_1 := \Phi(K_\varepsilon(0)).$$

Dann liegt zunächst mal

$$\Phi^{-1}(U_1) \subseteq U.$$

U_1 ist eine offene Umgebung von 0 in X:

$$\begin{aligned} U_1 &= \Phi(K_\varepsilon(0)) \\ &= \{x \in X \mid |\Phi^{-1}(x)| < \varepsilon\} \end{aligned}$$

da Φ bijektiv ist

$$\begin{aligned} &= \{x \in X \mid \underbrace{|\Phi^{-1}(x)|^2}_{\overset{(1)}{=} |z_2(x)|} < \varepsilon^2\} \\ &= z_2^{-1}(K_{\varepsilon^2}(0)) \quad \text{offen in } X \end{aligned}$$

⌊

Außerhalb des Nullpunktes $0 \in X$ ist

die Projektion $z_2 = (pr_2\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C})|X = Id_{\mathbb{C}}^2 \circ \Phi^{-1}$ eine zweiblättrige Überlagerung.

Also liefert z_2 außerhalb des Nullpunktes lokal eine Parametrisierung der NEIL'schen Parabel.

Das ist unmittelbar klar, da $Id_{\mathbb{C}}^2$ außerhalb des Nullpunktes $0 \in \mathbb{C}$ eine zweiblättrige Überlagerung ist und

$$z_2 | X\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\} = (\mathrm{Id}^2_{\mathbb{C}} \mid \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}) \circ (\Phi^{-1}|X\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\})$$

die Liftung dieser Überlagerung mittels der topologischen Abbildung $\Phi^{-1}|X\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ist.

Um eine Parametrisierung (genauer: Trennung) der beiden Zweige von $z_2|X\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ zu erhalten, wollen wir die Überlegung noch breiter ausführen:

Über jedem Punkt $Z^2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ liegen bzgl. $\mathrm{Id}^2_{\mathbb{C}}$ zwei Punkte von $\mathbb{C}$:

$$(\mathrm{Id}^2_{\mathbb{C}})^{-1}(Z^2) = \{Z,-Z\}$$

$$\left[\begin{aligned} Z' \in (\mathrm{Id}^2_{\mathbb{C}})^{-1}(Z^2) &\iff Z'^2 = Z^2 \\ &\iff (Z'-Z)(Z'+Z) \quad (= Z'^2 - Z^2) = 0 \\ &\iff Z' = Z \text{ oder } Z' = -Z \end{aligned}\right.$$

Wir wählen nun zu $Z_o \in \mathbb{C}$, $Z_o \neq 0$

eine zusammenhängende Umgebung U von Z_o in $\mathbb{C}$ mit $U \cap (-U) = \emptyset$

[Man setze etwa

$U := K_{|Z_o|}(Z_o)$ die Kreisscheibe um Z_o mit Radius $|Z_o|$.

Für ein $Z \in \mathbb{C}$ mit $|Z - Z_o| < |Z_o|$ und $|Z + Z_o| < |Z_o|$ müßte gelten

$2|Z_o| \leq |Z_o - Z| + |Z_o + Z| < 2|Z_o|$, ein Widerspruch also.

Dann sind die beiden Funktionen

$\mathrm{Id}^2_{\mathbb{C}} \mid U \to U^2$ und $\mathrm{Id}^2_{\mathbb{C}} \mid (-U) \to U^2$ Homöomorphismen;

wegen $(\mathrm{Id}^2_{\mathbb{C}})^{-1}(U_2) = U \cup (-U)$ parametrisieren (d.h. trennen) ihre Umkehrungen gerade die Zweige von $\mathrm{Id}^2_{\mathbb{C}}$ über der Umgebung U^2 von Z_o^2.

[Die Injektivität der beiden Funktionen gilt nach Konstruktion von U, die Surjektivität gilt natürlich nach Definition von U^2.

Schließlich ist $\mathrm{Id}^2_{\mathbb{C}}$ stetig und offen.

Nebenbemerkung:

Die Offenheit von $\mathrm{Id}^2_{\mathbb{C}}$ ist natürlich auch ganz elementar einzusehen:
Sei V offen in $\mathbb{C}$ und $Z \in V$.
Nun wähle man $r > 0$ so, daß die Kreisscheibe $K_r(Z) \subseteq V$.
Dann liegt $K_{r^2}(Z^2)$ $(\subseteq (K_r(Z))^2) \subseteq V^2$, denn:

$$Z'^2 \in K_{r^2}(Z^2) \iff |Z'^2 - Z^2| < r^2 \iff |Z' - Z||Z' + Z| < r^2$$

Ist nun $|Z' + Z| \geq r > 0$, dann ist $|Z' - Z| < \frac{r^2}{|Z' + Z|} \leq r$.

Ist aber $|Z' - Z| \geq r > 0$, dann ist $|Z' + Z| < \frac{r^2}{|Z' - Z|} \leq r$.

Jedenfalls liegt $K_{r^2}(Z^2) \subseteq (K_r(Z) \cup K_r(-Z))^2 = (K_r(Z))^2$

Liften wir nun diese Aussagen vermöge Φ^{-1} auf X!

Über jedem Punkt $Z^2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ liegen bzgl. z_2 zwei Punkte von X:

$z_2^{-1}(Z^2) = \{\Phi(Z), \Phi(-Z)\}$

[Man beachte nur:

$z_2^{-1}(Z^2) = (\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}^2 \circ \Phi^{-1})^{-1}(Z^2) = \Phi((\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}^2)^{-1}(Z^2))$

Die beiden Funktionen

$z_2|\Phi(U) \to U^2$ und $z_2|\Phi(-U) \to U^2$ sind Homöomorphismen;

wegen $z_2^{-1}(U^2) = \Phi(U) \cup \Phi(-U)$ parametrisieren (d.h. trennen) ihre Umkehrungen gerade die Zweige von z_2 über der Umgebung U^2 von Z_0^2

[Es sei nur noch bemerkt, daß

$\Phi(U) \cap \Phi(-U) = \Phi(U \cap (-U))$ $(= \emptyset)$, da Φ injektiv ist.

(3) Funktionentheoretische Betrachtung der NEIL'schen Parabel

(3.1) Zunächst mal ist

$X \subseteq \mathbb{C}^2$ eine analytische Menge

(X ist ja das Nullstellengebilde des WEIERSTRASS-Polynoms

$Z_1^2 - Z_2^3 \in {}_{\mathbb{C}}\mathcal{O}\,[Z_1]$.)

Φ: $\mathbb{C} \to X$ ist holomorph.

Außerhalb des Nullpunktes $0 \in X$ ist sicher auch Φ^{-1} holomorph, wie die explizite Darstellung in (1) zeigt. Mithin ist

$\Phi|\mathbb{C}\setminus\{0\} \to X\setminus\{0\}$ eine biholomorphe Abbildung.

X ist aber keine komplexe Mannigfaltigkeit; der Nullpunkt ist nämlich eine nichtnormale Singularität!

Man überlegt sich dazu, daß Φ^{-1} in $0 \in X$ nicht holomorph ist:

Sei $(z_1,z_2) \in X\setminus\{0\}$ beliebig gewählt. Dann hat der Differenzenquotient von Φ^{-1} in der ersten Variablen an den Punkten (z_1,z_2) und $0 \in X$ die Form:

$$\frac{\Phi^{-1}(z_1,z_2) - \Phi^{-1}(0,0)}{z_1 - 0} = \frac{1}{z_2} .$$

Dieser Ausdruck ist in der Nähe von $(z_1,z_2) = 0$ unbeschränkt.

Mithin ist Φ^{-1} eine (stetige) schwach holomorphe Funktion, die in $0 \in X$ *nicht* holomorph ist.

Dann ist freilich $0 \in X$ eine nichtnormale Singularität.

Die NEIL'sche Parabel und die komplexe Ebene liefern somit ein Beispiel für homöomorphe komplexe Räume, die *nicht* biholomorph äquivalent sind.

Die holomorphe Abbildung

$\Phi: \mathbb{C} \to X$ ist offenbar eine Normalisierung von X,
sogar eine Auflösung der Singularitäten von X.

Da $\Phi^{-1}(0) = \{0\}$ aus nur einem Punkt besteht, ist nach 8.2.2.
X in 0 irreduzibel.

(Man kann die Irreduzibilität von X in 0 aber auch leicht elementar einsehen, indem man zeigt,
daß das Ideal $I((X)_0)$ ein Primideal ist:
Mit dem Homöomorphismus Φ verlagern wir unser Problem von X in die Ebene $\mathbb{C}$:
Für $f \in \mathcal{O}(U)$ $(U = U(0) \subseteq \mathbb{C}^2)$ gilt:

$$(f)_0 \in I((X)_0) \iff (f \circ \Phi|\Phi^{-1}(U))_0 = 0$$

Seien nun $f_1,f_2 \in \mathcal{O}_0\setminus I((X)_0)$.
Dazu sei $U = U(0) \subseteq \mathbb{C}^2$, so daß (unter Bezeichnungsmißbrauch) f_1 und $f_2 \in \mathcal{O}(U)$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} f_1,f_2 \in \mathcal{O}_0\setminus I((X)_0) &\Rightarrow (f_i \circ \Phi|\Phi^{-1}(U))_0 \neq 0 \quad \text{für } i = 1,2 \\ &\Rightarrow ((f_1\cdot f_2) \circ \Phi|\Phi^{-1}(U))_0 \neq 0 \\ &\quad \text{(da } \mathcal{O}_0 \text{ ein Integritätsbereich ist)} \\ &\Rightarrow f_1\cdot f_2 \notin I((X)_0) \quad) \end{aligned}$$

Jedoch sind alle Potenzen von Φ^{-1} holomorph (vgl. die Darstellung in (1)). Insbesondere ist Φ^{-1} ganz algebraisch über ${}_X\mathcal{O}(X)$, z.B. gilt:

$$(\Phi^{-1})^2 - z_2 = 0.$$

(3.2) Es sei hier noch bemerkt, daß außerhalb des Nullpunktes $0 \in X$ die Projektion $z_2 = (pr_2\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C})|\,X = \mathrm{Id}^2_{\mathbb{C}} \circ \Phi$ eine sogar *analytische* Überlagerung ist.

Für Z_0 und U wie in der entsprechenden Ausführung in (2) sind die beiden Funktionen

$$z_2|\Phi(U) \to U^2 \quad \text{und} \quad z_2|\Phi(-U) \to U^2 \text{ biholomorph.}$$

[Dazu ist nur zu überlegen, daß $\mathrm{Id}^2_{\mathbb{C}}\,|\,U \to U^2$ und $\mathrm{Id}^2_{\mathbb{C}}\,|(-U) \to U^2$ biholomorph sind.
Die Holomorphie ist klar.
Die Holomorphie der Umkehrungen folgt sofort aus dem "Satz" über die Differenzierbarkeit von Umkehrfunktionen aus der Analysis.

(3.3) Bemerkung

Da $\Phi\colon \mathbb{C} \to X$ eine holomorphe topologische Abbildung ist, sind $\mathbb{C}$, Graph Φ^{-1} und Graph Φ biholomorph äquivalent:

$$X_1 := \text{Graph } \Phi^{-1} := \{(z_1,z_2,\Phi^{-1}(z_1,z_2)) \in \mathbb{C}^3 \mid (z_1,z_2) \in \underbrace{X}_{=\Phi(\mathbb{C})}\}$$

$$= \{(\Phi(Z_3),Z_3) \mid Z_3 \in \mathbb{C}\} \cong \text{Graph } \Phi$$

$$\underset{\text{Def.}\Phi}{=} \{(Z_1,Z_2,Z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid Z_1 = \underbrace{Z_3^3}_{=Z_3^2 Z_3},\ Z_2 = Z_3^2\} \quad (\text{analytisch in } \mathbb{C}^2)$$

$$= \{(Z_1,Z_2,Z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid Z_3^2 - Z_2 = 0,\ Z_2 Z_3 - Z_1 = 0\}.$$

Die kanonische Projektion

$$Z_3|X_1 : X_1 \ni (Z_1,Z_2,Z_3) \mapsto Z_3 \in \mathbb{C} \text{ ist biholomorph;}$$

ihre Umkehrung ist gegeben durch

$$\mathbb{C} \ni Z \mapsto (\Phi(Z),Z) \in X_1.$$

Nun ist auch X_1 eine Normalisierung zu X; die normalisierende Abbildung ist hier gegeben durch

$$\rho : \begin{cases} X_1 & \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow & X \\ (Z_1,Z_2,Z_3) & \longmapsto Z_3 \longmapsto & \Phi(Z_3) = (Z_1,Z_2) \end{cases} \quad \text{, also}$$

$$\rho = (pr: \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2)|X_1 \to X$$

Das ist gerade die Konstruktion, die wir in 2.2. gemacht haben:
Der komplexe Raum X_1 wird beschrieben durch

$$\begin{cases} \rho & : X_1 \to X \quad , \rho = (pr: \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2)|X_1 \to X \\ \Phi^{-1}\circ\rho = Z_3|X_1 & : X_1 \to \mathbb{C} \quad , Z_3 = pr: \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \end{cases}$$

Während die Normalisierung $\Phi: \mathbb{C} \to X$ den Vorteil hat, daß der normale komplexe *Raum* $\mathbb{C}$ der einfachst denkbare ist, hat die Normalisierung $\rho: X_1 \to X$ den Vorteil, daß ihre *Projektion* ρ die Einschränkung einer kanonischen Projektion des $\mathbb{C}^3$ ist.

(4) Die schwach holomorphen Funktionen auf der NEIL'schen Parabel

(4.1) Da Φ die NEIL'sche Parabel normalisiert, ist
jede schwach holomorphe Funktion auf X die Liftung vermöge Φ^{-1} einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C}$ und umgekehrt:
f schwach holomorphe Funktion in U

$$\underset{U \text{ offen in } X}{\Longleftrightarrow} \quad f = f_1 \circ \Phi^{-1}|U\setminus\{0\} \text{ für eine holomorphe Funktion } f_1: \Phi^{-1}(U) \to \mathbb{C}$$

["$\Rightarrow$" Sei U offen in X und $f: U\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ schwach holomorph in U.
Dann ist

$$f_1 := f\circ\Phi|\Phi^{-1}(U)\setminus\{0\} \quad \text{holomorph und in einer Umgebung von } 0 \in \mathbb{C} \text{ beschränkt,}$$

mithin ist nach dem RIEMANN'schen Hebbarkeitssatz

$$f_1: \Phi^{-1}(U) \to \mathbb{C} \text{ sogar holomorph.}$$

"$\Leftarrow$" Sei $f = f_1\circ\Phi^{-1}|U$ für eine holomorphe Funktion $f_1: \Phi^{-1}(U) \to \mathbb{C}$.
Dann ist

$$f \text{ stetig und } f|U\setminus\{0\} \text{ holomorph, insbesondere schwach holomorph in U.}$$

Es ist also

$$_X\mathcal{O}' = (\{f_1 \circ \Phi^{-1}|U\setminus\{0\} \mid f_1: \Phi^{-1}(U) \to \mathbb{C} \text{ holomorph}\})_{U \text{ offen in } X} \, ,$$

mit anderen Worten: $_X\mathcal{O}' = \Phi_*(_{\mathbb{C}}\mathcal{O})$ vermöge des Isomorphismus

$$_X\mathcal{O}'(U) \ni f \longmapsto f\circ\Phi|\Phi^{-1}(U) \in {_{\mathbb{C}}\mathcal{O}}|\Phi^{-1}(U)) \quad (U = \mathring{U} \subseteq X)$$

(Schwach holomorphe Funktionen auf X sind insbesondere stetig in $0 \in X$ fortsetzbar.)

(4.2) Sei nun U eine offene Umgebung von $0 \in X$, $f: U \to X$ (stetig) schwach holomorph.

Nehmen wir an, wir hätten U so klein gewählt, daß $f_1 := f \circ \Phi | \Phi^{-1}(U)$ in $\Phi^{-1}(U)$ in eine absolut konvergente Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n$ entwickelt werden kann.

Dann läßt sich f in U in der Form schreiben

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (\Phi^{-1})^n | U$$

Alle in dieser Reihe auftretenden Funktionen $a_n \, (\Phi^{-1})^n | U$ sind holomorph, *außer* evtl. $a_1 \, \Phi^{-1}$; genauer (vgl. (1)):

$$f(z_1,z_2) = a_1\Phi^{-1}(z_1,z_2) + \sum_{\substack{n=3 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} a_n z_1 z_2^{\frac{n-3}{2}} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} a_n z_n^{\frac{n}{2}}$$

$$= a_1\Phi^{-1}(z_1,z_2) + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+3} z_1 z_2^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z_2^n$$

$$= a_1\Phi^{-1}(z_1,z_2) + g(z_1,z_2) \quad \text{mit einer holomorphen Funktion } g \in {}_X\mathcal{O}(U)$$

[Es ist klar, daß durch

$$G(Z_1,Z_2) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+3} Z_1 \, Z_2^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} Z_2^n$$

in $\mathbb{C} \times z_2(U)$ $(\subseteq \mathbb{C}^2)$ eine holomorphe Funktion erklärt wird.

Dann ist

$g := G|U$ holomorph in U.]

Damit haben wir gesehen:

${}_X\mathcal{O}'$ ist endlich erzeugt über ${}_X\mathcal{O}$: $\quad {}_X\mathcal{O}' = {}_X\mathcal{O}\cdot\Phi^{-1} + {}_X\mathcal{O}\cdot 1$

Wegen $z_2 \cdot \Phi^{-1} = z_1$ ist

$z_2 \in {}_X\mathcal{O}(X)$ ein universeller Nenner auf X.

Die Existenz eines universellen Nenners zusammen mit der endlichen Erzeugtheit von ${}_X\mathcal{O}'$ über ${}_X\mathcal{O}$ liefert noch:

${}_X\mathcal{O}'$ ist kohärent

[Wie in 1.12. liefert die Abbildung

$${}_X\mathcal{O}' \ni (f)_x \longmapsto (z_2 \cdot f)_x \in {}_X\mathcal{O}$$

einen Garbenisomorphismus von ${}_X\mathcal{O}'$ auf die Untergarbe $z_2 \cdot {}_X\mathcal{O}'$ von ${}_X\mathcal{O}$.

Mit ${}_X\mathcal{O}'$ ist auch $z_2 \cdot {}_X\mathcal{O}'$ endlich erzeugt:

$$z_2 \cdot \chi^{O'} = \chi^{O} \cdot z_1 + \chi^{O} \cdot z_2 .$$

Wegen der Kohärenz von χ^{O} ist dann auch

L $z_2 \cdot \chi^{O'}$ und damit $\chi^{O'}$ kohärent.

(4.3) Seien U und $f = \Sigma a_n (\Phi^{-1})^n | U$ wie oben.

Wir wollen die oben angegebene Fortsetzung von f in $\mathbb{C}^2$ noch geometrisch interpretieren; sei diese Fortsetzung von f (natürlich in einem geeigneten Bereich des $\mathbb{C}^2$) mit F bezeichnet:

$$\begin{aligned} F(Z_1, Z_2) &= a_1 \frac{Z_1}{Z_2} + \sum_{n=o}^{\infty} a_{2n+3} Z_1 Z_2^n + \sum_{n=o}^{\infty} a_{2n} Z_2^n \\ &= Z_1 \cdot \sum_{n=-1}^{\infty} a_{2n+3} Z_2^n + \sum_{n=o}^{\infty} a_{2n} Z_2^n \end{aligned}$$

$$\forall\ (Z_1, Z_2) \in \mathbb{C} \times (z_2(U) \setminus \{0\})$$

Das ist die Aufspaltung einer LAURENT-Reihenentwicklung in einen bzgl. Z_1 ungeraden und einen geraden Anteil:

$$\frac{F(Z_1, Z_2) - F(-Z_1, Z_2)}{2} = Z_1 \cdot \sum_{n=-1}^{\infty} a_{2n+3} Z_2^n$$

$$\frac{F(Z_1, Z_2) + F(-Z_1, Z_2)}{2} = \sum_{n=o}^{\infty} a_{2n} Z_2^n$$

Man erkennt, daß in der zweiten Formel die Wahl von Z_1 überhaupt keine Rolle spielt. Schafft man in der ersten Formel Z_1 (falls $\neq 0$) auf die linke Seite, so ist auch sie von der speziellen Wahl von Z_1 unabhängig.

Wir wählen nun einmal statt Z_1 ein z_1 so, daß $(z_1, Z_2) \in X$. Dann liegt auch $(-z_1, Z_2) \in X$ und wir dürfen oben statt F überall f schreiben:

$$Z_1 \frac{f(z_1, Z_2) - f(-z_1, Z_2)}{2 z_1} = Z_1 \cdot \sum_{n=-1}^{\infty} a_{2n+3} Z_2^n$$

$$\frac{f(z_1, Z_2) + f(-z_1, Z_2)}{2} = \sum_{n=o}^{\infty} a_{2n} Z_2^n$$

Nun läßt sich F durch f ausdrücken

$$\begin{aligned} F(Z_1, Z_2) &= Z_1 \cdot \frac{f(z_1, Z_2) - f(-z_1, Z_2)}{2 z_1} + \frac{f(z_1, Z_2) + f(-z_1, Z_2)}{2} \\ &= \frac{Z_1 + z_1}{2 z_1}\, f(z_1, Z_2) - \frac{Z_1 - z_1}{2 z_1}\, f(-z_1, Z_2) \end{aligned}$$

$$= \frac{Z_1 - (-z_1)}{z_1 - (-z_1)} f(z_1,Z_2) + \frac{Z_1 - z_1}{(-z_1) - z_1} f(-z_1,Z_2)$$

$$\forall\ (Z_1,Z_2) \in \mathbb{C} \times (z_2(U)\setminus\{0\})$$

Daran liest man ab:

F ist eine lineare Homotopie zwischen den Einschränkungen von f auf die beiden Zweige von z_2, genauer:

Für $Z_1 = \lambda\cdot z_1 + (1-\lambda)\cdot(-z_1)\ (= (2\lambda-1)z_1),\ \lambda \in \mathbb{C}$, ist

$$F(Z_1,Z_2) = \lambda\cdot f(z_1,Z_2) + (1-\lambda)\, f(-z_1,Z_2) \quad , \text{ falls } Z_2 \in z_2(U)\setminus\{0\}$$

Wählt man andererseits für ein festes $(Z_2 =)\ z^2 \neq 0$ eine Umgebung V von z mit $V^2 \subseteq z_2(U)$ und $V \cap (-V) = \emptyset$, dann ist (man beachte (2)) evtl. nach Vertauschen von z_1 und $-z_1$:

$$(z_1,Z_2) = \underbrace{(z_2|\Phi(V) \to V^2)^{-1}}_{=:\, z_{2+}}(Z_2)\ ,\ (-z_1,Z_2) = \underbrace{(z_2|\Phi(-V) \to V^2)^{-1}}_{=:\, z_{2-}}(Z_2)$$

$$\forall\ Z_2 \in V^2$$

und:

$$F(Z_1,Z_2) = \left(\frac{Z_1 + z_1}{2z_1} \cdot f\right) \circ (z_{2+}^{-1} + z_{2-}^{-1})\ (Z_2) \qquad \forall\ (Z_1,Z_2) \in \mathbb{C} \times V^2$$

(dabei ist $z_1\colon X \to \mathbb{C}$ ebenso wie f als Funktion aufzufassen!)

Setzt man statt f die Funktion $z_2\cdot f$ wie oben fort, so erkennt man leicht wieder, daß z_2 ein universeller Nenner auf X ist.

(Macht man den linearen Ansatz

$$H(Z_1,Z_2) := \frac{Z_1 - (-z_1)}{z_1 - (-z_1)} Z_2 f(z_1,Z_2) + \frac{Z_1 - z_1}{(-z_1) - z_1} Z_2 f(-z_1,Z_2)$$

$$\forall\ (Z_1,Z_2) \in \mathbb{C} \times (z_2(U)\setminus\{0\}),$$

wobei $(z_1,Z_2) \in X$ sein soll $\forall\ Z_2$,

dann zeigt die lokale Umschreibung von H mit z_{2+} und z_{2-}, also

$$H(Z_1,Z_2) = \left(\frac{Z_1 + z_1}{2z_1} \cdot Z_2 f\right) \circ (z_{2+}^{-1} + z_{2-}^{-1})\ (Z_2)$$

$$\forall\ (Z_1,Z_2) \in \mathbb{C} \times V^2,\ \ V \text{ geeignet},$$

daß H holomorph ist in $\mathbb{C} \times (z_2(U)\setminus\{0\})$.

Andererseits zeigt die Umschreibung

$$H(Z_1,Z_2) = Z_1 \cdot \frac{f(z_1,Z_2) - f(-z_1,Z_2)}{2\frac{z_1}{Z_2}} + Z_2 \frac{f(z_1,Z_2) + f(-z_1,Z_2)}{2}\ ,$$

daß H beschränkt ist nahe $Z_2 = 0$:

Während der zweite Summand völlig unbedenklich ist, hat der erste bis auf den Faktor Z_1 die Form

$$\frac{f \circ \Phi|\Phi^{-1}(z_1,Z_2)) - f \circ \Phi(\Phi^{-1}(-z_1,Z_2))}{\Phi^{-1}(z_1,Z_2) - \Phi^{-1}(-z_1,Z_2)}$$

und das ist beschränkt nahe $Z_2 = 0$, da $f \circ \Phi$ nach dem RIEMANN'schen Hebbarkeitssatz ja in 0 holomorph fortsetzbar ist. Nun läßt sich auf H der 1. RIEMANN'sche Hebbarkeitssatz anwenden, d.h. H läßt sich holomorph in $\mathbb{C} \times z_2(U)$ fortsetzen.

Mithin ist $z_2 \cdot f$ holomorph fortsetzbar in 0.)

Dieses Verfahren hatten wir gerade benutzt im Beweis des Satzes 1.9. über die Existenz des universellen Nenners.

(4.4) Die endliche Erzeugtheit von ${}_X\mathcal{O}'$ zeigt gleich noch, daß jede schwach holomorphe Funktion auf X ganz algebraisch über ${}_X\mathcal{O}$ ist.

Schreibt man nämlich $f \in {}_X\mathcal{O}'(U)$ (U offen in X) in der Form

$$f = g_1\Phi^{-1} + g_2 \quad \text{mit } g_1,g_2 \in {}_X\mathcal{O}(U),$$

dann gilt wegen $(\Phi^{-1})^2 = z_2$:

$$(f - g_2)^2 = g_1^2 z_2 \quad \text{, d.h.}$$

$$f^2 - 2g_2 f + (g_2^2 - g_1^2 z_2) = 0.$$

Also erfüllt f die Gleichung

$$p_f(z_1,z_2)(f) = 0 \quad \text{, wobei } p_f(z_1,z_2)(\vartheta) := \vartheta^2 - 2g_2\vartheta + (g_2^2 - g_1^2 z_2)$$

holomorphe Koeffizienten besitzt.

Wir wollen dieses Polynom $p_f(z_1,z_2)$ für geeignete Wahl von g_1 und g_2 noch geometrisch interpretieren. Seien dazu U und $f = \Sigma\, a_n(\Phi^{-1})^n|U$ wie oben.

Wir setzen

$$g_1 := \sum_{n=o}^{\infty} a_{2n+1} z_2^n \qquad , \; g_2 := \sum_{n=o}^{\infty} a_{2n} z_2^n$$

(Diese Ausdrücke sind unabhängig von z_1.)

Dann ist nach Definition von Φ^{-1} und f (vgl. in 4.2)):

$$f = g_1 \cdot \Phi^{-1} + g_2$$

Es ergibt sich für die Koeffizienten von $p_f(z_1,z_2)$:

$$2g_2 = f(z_1,z_2) + f(-z_1,z_2) \qquad \text{(vgl. in (4.3)!)}$$
$$g_2^2 - g_1^2 z_2 = (g_2 + g_1\Phi^{-1})(g_2 - g_1\Phi^{-1}) \qquad \text{(wegen } z_2 = (\Phi^{-1})^2\text{)}$$
$$= (g_2 + g_1\Phi^{-1}(z_1,z_2))(g_2 + g_1\Phi^{-1}(-z_1,z_2))$$
$$= f(z_1,z_2)\cdot f(-z_1,z_2) \qquad \text{(da } g_1 \text{ und } g_2 \text{ unabhängig von } z_1 \text{ sind.)}$$

Also:

$$p_f(z_1,z_2) = \vartheta^2 - (f(z_1,z_2) + f(-z_1,z_2))\vartheta + f(z_1,z_2)\cdot f(-z_1,z_2)$$
$$= (\vartheta - f(z_1,z_2))\cdot(\vartheta - f(-z_1,z_2))$$

Es ist klar, wie dieses Polynom mit den Zweigen von z_2 zusammenhängt:

(z_1,z_2) und $(-z_1,z_2)$ sind gerade die Punkte aus X, die (bzgl. der Projektion z_2) über z_2 liegen.

Die Holomorphie der Koeffizienten ist somit ein Ausdruck ihrer Symmetrie.

(4.5) Bemerkung

Es ist interessant, daß man zu schwach holomorphen Funktionen auf X immer ganze Gleichungen von höchstens zweitem Grad finden kann; daraus kann man nämlich umgekehrt wieder folgern, daß ${}_X\mathcal{O}'$ bereits von zwei schwach holomorphen Funktionen über ${}_X\mathcal{O}$ erzeugt werden kann:

Wir betrachten die in (3.3) angegebene

Normalisierung $\rho\colon X_1 \to X$.

Für jedes $f \in {}_X\mathcal{O}'(U)$ (U offen in X) ist dann $f \circ \rho|\rho^{-1}(U)$ holomorph in $\rho^{-1}(U)$, also lokal holomorph in den $\mathbb{C}^3$ fortsetzbar.

Besonders einfach stellt sich nun die Liftung von Φ^{-1} auf X_1 dar (vgl. (3.3)):

$\Phi^{-1} \circ \rho = Z_3|X_1$.

Die ganze Gleichung $(\Phi^{-1})^2 - z_2 = 0$ für Φ^{-1} geht über in

$$(Z_3|X_1)^2 - \overbrace{Z_2|X_1}^{z_2\circ\rho=} = 0 \quad \text{, d.h.}$$

$$Z_3^2 - Z_2 \in {}_2\mathcal{O}(\mathbb{C}^2)[Z_3] \cap I_{X_1}(\mathbb{C}^2) \qquad (\subseteq {}_3\mathcal{O}(\mathbb{C}^3))$$

Nach dem WEIERSTRASS'schen Divisionssatz ist jede holomorphe Funktion

$F \in {}_3\mathcal{O}(V)$, $V = V(0) \subseteq \mathbb{C}^3$, lokal (o.B.d.A. in V) durch

$Z_3^2 - Z_2$ mit Rest teilbar:

$$F = (Z_3^2 - Z_2)\cdot Q + R$$
$$\text{mit } R \in {}_2\mathcal{O}(W)[Z_3]\text{ , } \deg R < 2\text{ ,}$$
$$W = (\mathrm{pr}\colon \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2)(V)$$

Die Einschränkung dieser Gleichung auf X_1 liefert wegen $Z_3^2 - Z_2 \in I_{X_1}(\mathbb{C}^2)$:

$$F|V \cap X_1 = R|V \cap X_1 \,.$$

Schreiben wir R in der Form

$$R = F_1(Z_1,Z_2)\cdot Z_3 + F_2(Z_1,Z_2) \quad \text{mit } F_1,F_2 \in {}_2\mathcal{O}(W),$$

dann ist

$$\begin{aligned} F|V \cap X_1 &= R|V \cap X_1 \\ &= F_1 \circ \underbrace{(Z_1,Z_2)|V \cap X_1}_{\underset{\text{Def.}}{=} \rho|V\cap X_1} \cdot \underbrace{Z_3|V \cap X_1}_{\underset{\text{Def.}}{=} \Phi^{-1}\circ\rho|V\cap X_1} + F_2 \circ \underbrace{(Z_1,Z_2)|V \cap X_1}_{\underset{\text{Def.}}{=} \rho|V\cap X_1} \\ &= (F_1|W \cap X \cdot \Phi^{-1} + F_2|W \cap X) \circ \rho|V \cap X_1 \\ &= (\quad f_1 \quad \cdot \Phi^{-1} + \quad f_2 \quad) \circ \rho|V \cap X_1 \quad \text{mit } f_1,f_2 \in {}_X\mathcal{O}(W\cap X). \end{aligned}$$

Wegen ${}_X\mathcal{O}' = \rho_*({}_{X_1}\mathcal{O})$ bedeutet das gerade

$${}_X\mathcal{O}' = {}_X\mathcal{O}\cdot\Phi^{-1} + {}_X\mathcal{O}\cdot 1$$

Diese Schlußweise haben wir gerade in 2.3. angewandt; sie wird auch wesentlich benutzt beim Beweis des in 7.2. nur zitierten Satzes über die Kohärenz der Bildgarbe.

(5) Die holomorphen Funktionen auf der NEIL'schen Parabel

Es ist nicht verwunderlich, daß man zur Beschreibung von ${}_X\mathcal{O}'$ nichts über die explizite Form von ${}_X\mathcal{O}$ wissen mußte; es sind ja schwache Holomorphie und Holomorphie zwei verschiedene Holomorphiebegriffe, die unabhängig voneinander studiert werden können, wenn eine Normalisierung bekannt ist. Die Normalisierung (als bimeromorphe Abbildung verstanden) spielt beim Studium schwach holomorpher Funktionen auf komplexen Räumen dieselbe Rolle wie die (biholomorphen) Karten beim Studium holomorpher Funktionen auf komplexen Mannigfaltigkeiten. Somit liefert übrigens die Normalisierung erst die Möglichkeit, schwache Holomorphie in natürlicher Weise zu deuten, nämlich als Bild der Holomorphie unter der Normalisierung. Holomorphie wird dagegen in komplexen Räumen durch lokale Einbettung in einen $\mathbb{C}^n$ definiert.
Außer daß die (normalisierende) Abbildung $\Phi\colon \mathbb{C} \to X$ vorkommen wird, hat nun die Beschreibung der holomorphen Funktionen auf X nicht viel mit Normalisierung zu tun; wir wollen ${}_X\mathcal{O}$ eigentlich nur zum Vergleich und der Vollständigkeit halber untersuchen.

(5.1) Außerhalb des Nullpunktes $0 \in X$ ist X eine komplexe Mannigfaltigkeit; dort ist also Holomorphie und schwache Holomorpie dasselbe.

Bleibt ${}_X\mathcal{O}_0$ zu untersuchen.

Sei hier wie in (4.2) U eine offene Umgebung von $0 \in X$, $f\colon U \to \mathbb{C}$ (stetig) schwach holomorph. U sei wieder so klein gewählt, daß $f_1 := f \circ \Phi|\Phi^{-1}(U)$ in $\Phi^{-1}(U)$ in eine absolut konvergente Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n$ entwickelt werden kann.

Dann hat f die Form (vgl. (4.2))

$$\begin{aligned} f(z_1,z_2) &= a_1\Phi^{-1}(z_1,z_2) + z_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+3} z_2^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z_2^n \\ &= a_1\Phi^{-1}(z_1,z_2) + z_1 \cdot g_1(z_2) \quad + g_2(z_2) \end{aligned}$$

mit holomorphen Funktionen $g_1, g_2 \in {}_1\mathcal{O}(z_2(U))$.

Daran liest man ab:

$$\begin{aligned} f \text{ holomorph in } U &\iff a_1\Phi^{-1} \ (= f - z_1 g_1 - g_2) \text{ holomorph in } U \\ &\iff a_1 = 0 \end{aligned}$$

(da Φ^{-1} nach (3.1) um $0 \in X$ *nicht* holomorph ist)

Es ist $\quad a_1 = \frac{df_1}{dZ}(0)$.

Es fällt jetzt leicht, unter den $f_1 \in {}_1\mathcal{O}_0$ diejenigen auszuzeichnen, deren Liftung $f_1 \circ \Phi^{-1}$ um $0 \in X$ holomorph ist; für $f_1 \in {}_1\mathcal{O}_0$ gilt:

$$f_1 \circ \Phi^{-1} \textit{ holomorph} \text{ in einer Umgebung von } 0 \in X \iff \frac{df_1}{dZ}(0) = 0$$

(Wir fassen dabei hier und im folgenden Keime in 0 als Potenzreihen in 0 auf und umgekehrt; $f_1 \circ \Phi^{-1}$ ist dann z.B. oben als Potenzreihe in Φ^{-1}-Koordinaten zu verstehen.)

Weiter sind die auf X um 0 holomorphen Funktionen gegeben durch

$${}_X\mathcal{O}_0 = \{z_1 g_1(z_2) + g_2(z_2) \mid g_1, g_2 \in {}_1\mathcal{O}_0\}$$

(Man interpretiere die Ausdrücke $z_1 g_1(z_2) + g_2(z_2)$ als Potenzreihen!)

Die Darstellung eines $f \in {}_X\mathcal{O}_0$ in der Form

$$f = z_1 g_1(z_2) + g_2(z_2) \quad \text{mit } g_1, g_2 \in {}_1\mathcal{O}_0 \text{ ist } \textit{eindeutig}$$

⌈Nehmen wir zwei solche Darstellungen

$$z_1 g_1(z_2) + g_2(z_2) = z_1 g_1'(z_2) + g_2'(z_2) ,$$

also

$$z_1(g_1(z_2) - g_1'(z_2)) + (g_2(z_2) - g_2'(z_2)) = 0.$$

Da mit (z_1,z_2) auch $(-z_1,z_2)$ in X liegt, gilt diese Gleichung auch für $-z_1$ statt z_1:

$$-z_1(g_1(z_2) - g_1'(z_2)) + (g_2(z_2) - g_2'(z_2)) = 0.$$

Addition der beiden Gleichungen liefert zunächst

$g_2(z_2) = g_1'(z_2)$ und dann

$z_1(g_1(z_2) - g_1'(z_2)) = 0$,

also auch

$g_1(z_2) = g_1'(z_2)$]

Wir haben also eine bijektive Zuordnung

$$\begin{cases} {}_1\mathcal{O}_0 \oplus {}_1\mathcal{O}_0 \longrightarrow {}_X\mathcal{O}_0 \\ (g_1,g_2) \longmapsto z_1g_1(z_2) + g_2(z_2) \end{cases}$$

Diese Zuordnung ist natürlich ein $\mathbb{C}$-Vektorraum-Isomorphismus.

Die Multiplikation auf ${}_X\mathcal{O}_0$ ist charakterisiert durch $z_1^2 = z_2^3$; definiert man also auf ${}_1\mathcal{O}_0 \oplus {}_1\mathcal{O}_0$ eine Multiplikation durch

$$(g_1,g_2)\cdot(h_1,h_2) := (g_1+h_1,\ g_2+h_2+Z^3g_1h_1) \quad , \ g_1,g_2,h_1,h_2 \in {}_1\mathcal{O}_0,$$

dann wird obige Zuordnung ein $\mathbb{C}$-Algebra-Isomorphismus.

(5.2) Üblicherweise wird ${}_X\mathcal{O}$ gegeben durch ${}_2\mathcal{O} / I_X$.

Wir wollen uns hier noch überlegen,
daß die Idealgarbe I_X von $Z_1^2 - Z_2^3$ über ${}_2\mathcal{O}$ erzeugt wird.

Als erstes überlegen wir uns für $x \in X\setminus\{0\}$:

$$(I_X)_x = (Z_1^2 - Z_2^3)\cdot {}_2\mathcal{O}_x$$

[Sei $x \in X\setminus\{0\} = \Phi(\mathbb{C}\setminus\{0\})$, also

$$x = \Phi(Z_0) = (Z_0^3,Z_0^2) \quad \text{für ein } Z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Weiter sei $f \in (I_X)_x$.

Nach (3.2) läßt sich X in einer Umgebung von x durch z_2 biholomorph parametrisieren:

$z_{2+} := (z_2|\Phi(U) \to U^2)$ ist biholomorph für hinreichend kleine Umgebungen $U(Z_0) \subseteq \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Wir wählen U so klein, daß

$f|\Phi(U)$ definiert und gleich 0 ist.

Nun ist $\Phi(U)$ der Graph der holomorphen Funktion $z_1 \circ z_{2+}^{-1}$:

$$\Phi(U) = z_{2+}^{-1}(U^2) = \{(z_1 \circ z_{2+}^{-1}(Z), \underbrace{z_2 \circ z_{2+}^{-1}(Z)}_{= Z}) \mid Z \in U^2\}$$

da $(z_1,z_2) = \mathrm{Id}_X$

$$= \{(Z_1,Z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid Z_1 - z_1 \circ z_{2+}^{-1}(Z_2) = 0\}$$

Schreiben wir wie üblich kurz $Z^{3/2} := z_1 \circ z_{2+}^{-1}(Z) \quad (Z \in U^2)$, dann ist also

$$\Phi(U) = \{(Z_1,Z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid Z_1 - Z_2^{3/2} = 0\}.$$

Durch die (biholomorphe) Koordinatentransformation

$$T : \begin{cases} \mathbb{C} \times U^2 \longrightarrow \mathbb{C} \times (U^2 - Z_0^2) \\ (Z_1,Z_2) \longmapsto (Z_1 - Z_2^{3/2},\ Z_2 - Z_0^2) \end{cases}$$

(Wir schreiben dafür kurz

$$Z_1' := Z_1 - Z_2^{3/2} \qquad \text{oder:} \quad Z_1 = Z_1' + (Z_2' + Z_0^2)^{3/2}$$

$$Z_2' := Z_2 - Z_0^2 \qquad\qquad Z_2 = Z_2' + Z_0^2 \;)$$

geht $\Phi(U)$ über in ein Stück der zweiten Koordinatenachse:

$$T(\Phi(U)) = \{0\} \times (U^2 - Z_0^2)$$

(Man beachte nur:

$$(Z^2)^{3/2} = z_1 \circ z_{2+}^{-1}(Z^2) = z_1(Z^3,Z^2) = Z^3 \quad \forall\, Z \in U \;)$$

Wir bemerken noch, daß T den Koordinatenursprung in den Nullpunkt verlagert:

$$T(Z_0^3,Z_0^2) = (0,0)$$

Nun stellt man einerseits fest:

$$f|\Phi(U) = 0 \iff f \circ T^{-1} \mid \underbrace{T(\Phi(U))}_{= \{0\} \times (U^2 - Z_0^2)} = 0$$

$$\iff f \circ T^{-1} = f_2' \cdot Z_1' \quad \text{für ein } f_2' \in {}_2\mathcal{O}_0$$

("$\Rightarrow$": Sei $f \circ T^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(Z_2') Z_1'^{\nu}$ die Entwicklung von $f \circ T^{-1}$

nach Z_1' mit holomorphen Koeffizienten a_ν.

Wegen $0 = f \circ T^{-1}(0,Z_2') = a_0(Z_2')$ ist

$$f \circ T^{-1} = Z_1' \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(Z_2') Z_1'^{\nu-1}.$$

Man setze $f_2' := \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(Z_2') Z_1'^{\nu-1}$)

$$\Longleftrightarrow \quad f = (f_2' \circ T)\cdot(Z_1 - Z_2^{3/2}) \quad \text{für ein } f_2 := f_2' \circ T \in {}_2\mathcal{O}_x$$

Andererseits ist

$$Z_1^2 - Z_2^3 = (Z_1 - Z_2^{3/2})(Z_1 + Z_2^{3/2}) \qquad \forall\, Z_2 \in U^2$$

(Man beachte nur:

$$Z_2^3 = z_2^3 \circ z_{2+}^{-1}(Z_2) = z_1^2 \circ z_{2+}^{-1}(Z_2) = (Z^{3/2})^2 \quad)$$

$$\Rightarrow \quad Z_1 - Z_2^{3/2} = \underbrace{\frac{1}{Z_1 + Z_2^{3/2}}}_{\in\, {}_2\mathcal{O}_x} \cdot (Z_1^2 - Z_2^3)$$

Also ist $f = \underbrace{(f_2 \cdot \frac{1}{Z_1 + Z_2^{3/2}})}_{=:\, f_1 \,\in\, {}_2\mathcal{O}_x} \cdot (Z_1^2 - Z_2^3)$

$\lfloor$

Für $x = 0 \in X$ ist die eben durchgeführte Schlußweise (welche aus der Theorie der komplexen Mannigfaltigkeiten wohlbekannt ist) nicht anwendbar. In diesem Fall liefert aber für $f \in (I_X)_0$ der WEIERSTRASS'sche Divisionssatz sofort:

$$f = f_1 \cdot (Z_1^2 - Z_2^3) \qquad \text{für ein } f_1 \in {}_2\mathcal{O}_0$$

$\lceil$Zunächst ist

$$f = f_1(Z_1^2 - Z_2^3) + r \qquad \text{mit } f_1 \in {}_2\mathcal{O}_0, \quad r \in {}_1\mathcal{O}_0[Z_1] \quad , \deg(r) < 2 .$$

Nun ist auch $r \;\; (= f - f_1(Z_1^2 - Z_2^3)\,) \in (I_X)_0$, d.h.

r verschwindet auf X.

Dann muß aber r identisch verschwinden:
Schreiben wir dazu r in der Form

$$r = a_1(Z_2)Z_1 + a_0(Z_2) \qquad \text{mit } a_0, a_1 \in {}_1\mathcal{O}_0 .$$

Sei $Z_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ so, daß r dort definiert ist.
Über Z_2 liegen (bzgl. z_2) zwei Punkte aus X:

$$(z_1, Z_2) \; , \; (-z_1, Z_2) \in X.$$

An diesen Stellen ist (falls nur Z_2 nahe genug bei 0 liegt)

$$a_1(Z_2)z_1 + a_0(Z_2) = r(z_1, Z_2) = 0 \quad \text{und}$$

$$-a_1(Z_2)z_1 + a_0(Z_2) = r(-z_1, Z_2) = 0.$$

Addition bzw. Subtraktion der beiden Gleichungen liefert

$$a_o(Z_2) = 0 \quad , \quad a_1(Z_2) = 0.$$

Da $Z_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ beliebig in der Nähe von 0 im Definitionsbereich von a_o und a_1 war, ist dann überhaupt

$$a_o = a_1 = 0$$

und somit $r = a_1(Z_2)Z_1 + a_o(Z_2) = 0$

Man kann sich aber auch ohne weiteres direkt überlegen, daß f durch $Z_1^2 - Z_2^3$ teilbar ist; wir geben f_1 explizit an:

Sei dazu $f = \sum\limits_{\mu,\nu=o}^{\infty} a_{\mu\nu} Z_1^{\mu} Z_2^{\nu}$ die Potenzreihenentwicklung von f

$f \in (I_X)_o \iff f|X = 0$

(Wir wollen nicht immer eigens auf den Konvergenzbereich der Entwicklung von f hinweisen und schreiben daher einfach X statt Durchschnitt von X mit dem Konvergenzbereich von $\sum\limits_{\mu,\nu} a_{\mu\nu} Z_1^{\mu} Z_2^{\nu}$; peinliche Genauigkeit in der Schreibweise würde hier nur zur Unübersichtlichkeit der Rechnung beitragen.)

$$\underset{(X=\Phi(\mathbb{C}))}{\iff} \quad \underbrace{f(\Phi(Z))}_{} = 0 \qquad \forall\, Z \in \mathbb{C}$$

$$= f(Z^3, Z^2)$$

$$= \sum_{\mu,\nu} a_{\mu\nu} Z^{3\mu+2\nu}$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} \Big(\sum_{3\mu+2\nu=n} a_{\mu\nu} \Big) Z^n$$

$$\iff \sum_{3\mu+2\nu=n} a_{\mu\nu} = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_o \qquad (\text{o.B.d.A. } n \neq 1; \text{ vgl. } (1)!)$$

Nun parametrisieren wir $\{(\mu,\nu) \mid 3\mu + 2\nu = n\}$ gemäß (1) :

$$\sum_{3\mu+2\nu=n} a_{\mu\nu} \underset{(1)}{=} \begin{cases} \sum\limits_{i=o}^{[\frac{n}{6}]} a_{2i,\frac{n}{2}-3i} & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ \sum\limits_{i=o}^{[\frac{n-3}{6}]} a_{2i+1,\frac{n-3}{2}-3i} & \text{, falls } n \text{ ungerade }, n \neq 1 \end{cases}$$

(dabei ist z.B. $[\frac{n}{6}]$ die größte Ganze unter $\frac{n}{6}$)

$$= \begin{cases} a_{o,\frac{n}{2}} + \sum\limits_{i=o}^{[\frac{n-6}{6}]} a_{2(i+1),\frac{n-6}{2}-3i} & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ a_{1,\frac{n-3}{2}} + \sum\limits_{i=o}^{[\frac{n-9}{6}]} a_{2i+3,\frac{n-9}{2}-3i} & \text{, falls } n \text{ ungerade, } n \neq 1 \end{cases}$$

(dabei wurde jeweils der erste Summand abgespalten und dann der Summationsindex i durch i+1 ersetzt)

$$= \begin{cases} a_{o,l+3} + \sum\limits_{i=o}^{[\frac{l}{3}]} a_{2(i+3),l-3i} & \text{, } l := \frac{n-6}{2}\text{, falls } n \text{ gerade} \\ a_{1,l+3} + \sum\limits_{i=o}^{[\frac{l}{3}]} a_{2i+3,l-3i} & \text{, } l := \frac{n-9}{2}\text{, falls } n \text{ ungerade, } n \neq 1 \end{cases}$$

$$= a_{k,l+3} + \sum_{i=o}^{[\frac{l}{3}]} a_{k+2(i+1),l-3i}$$

$$\text{wobei } \begin{cases} k = o,\ l = \frac{n-6}{2} & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ k = 1,\ l = \frac{n-9}{2} & \text{, falls } n \text{ ungerade, } n \neq 1 \end{cases}$$

Zusammen erhält man:

$$f \in (I_X)_o \iff a_{k,l+3} + \sum_{i=o}^{[\frac{l}{3}]} a_{k+2(i+1),l-3i} = 0 \quad \forall\, k \in \{0,1\},\ l = -3,-2,\ldots \qquad (*)$$

Nun setzen wir

$$b_{k,l} := \sum_{i=o}^{[\frac{l}{3}]} a_{k+2(i+1),l-3i} \qquad \forall\, k,l \in \mathbb{N}_0 \qquad \text{und}$$

$$f_1 := \sum_{k,l=o}^{\infty} b_{k,l} z_1^k z_2^l$$

Dann ist zunächst mal die Reihe

$\sum\limits_{k,l} b_{k,l} z_1^k z_2^l$ in einer Umgebung von (0,0) kompakt konvergent.

⌈Wegen der kompakten Konvergenz von $\sum\limits_{k,l} a_{k,l} z_1^k z_2^l$ gibt es $r_1 r_2 \in]0,1[$ mit

$\sum\limits_{k,l} |a_{k,l}| r_1^k r_2^l < \infty$.

Dann ist wegen $r_1^{k+4i} \leq r_1^{k+2(i+1)} \quad \forall\, i \geq 1$ auch

$$\sum_{i,k,l=o}^{\infty} |a_{k+2(i+1),l}| r_1^k r_2^l (r_1^4)^i < \infty$$

Also ist nach dem Lemma von ABEL die Reihe

$\sum\limits_{i,k,l} a_{k+2(i+1),l} Z_1^k Z_2^l Z_3^i$ in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{C}^3$ kompakt konvergent.

Insbesondere ergibt sich in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{C}^2$ die kompakte Konvergenz der Reihe

$$\sum_{i,k,l} a_{k+2(i+1),l} Z_1^k Z_2^l (Z_2^3)^i$$

$$= \sum_{k,l} \sum_{i=o}^{[\frac{l}{3}]} a_{k+2(i+1),l-3i} Z_1^k Z_2^l$$

(dabei wurde l ersetzt durch l-3i und

die Summation über i und l umgeordnet)

Nun rechnen wir nach:

$$f_1 \cdot (Z_1^2 - Z_2^3) = \sum_{k,l} b_{k,l} Z_1^{k+2} Z_2^l - \sum_{k,l} b_{k,l} Z_1^k Z_2^{l+3}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l} b_{k-2,l} Z_1^k Z_2^l - \sum_{k} \sum_{l=3}^{\infty} b_{k,l-3} Z_1^k Z_2^l$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=3}^{\infty} (b_{k-2,l} - b_{k,l-3}) Z_1^k Z_2^l +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=o,1,2} b_{k-2,l} Z_1^k Z_2^l +$$

$$+ \sum_{k=o,1} \sum_{l=3}^{\infty} (-b_{k,l-3}) Z_1^k Z_2^l$$

Für k=2,3,... und l=3,4,... gilt nach Definition

$$b_{k-2,l} - b_{k,l-3} = \sum_{i=o}^{[\frac{l}{3}]} a_{k+2i,l-3i} - \sum_{i=o}^{[\frac{l}{3}]-1} a_{k+2(i+1),l-3(i+1)}$$

$$= \text{-------------} - \sum_{i=1}^{[\frac{l}{3}]} a_{k+2i,l-3i}$$

$$= a_{k,l}.$$

Für $l \in \{0,1,2\}$ ist $[\frac{l}{3}] = 0$ und daher nach Definition für alle k = 2,3,...

$b_{k-2,l} = a_{k,l}$.

Für $k \in \{0,1\}$ und $l=3,4,\dots$ gilt nach (*)

$$-b_{k,l-3} = a_{k,l}.$$

Zusammen:

$$f_1\cdot(Z_1^2-Z_2^3) = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{l=o}^{\infty} a_{k,l}Z_1^kZ_2^l + \sum_{k=o,1}\sum_{l=3}^{\infty} a_{k,l}Z_1^kZ_2^l .$$

Wegen (*) gilt schließlich noch für $k \in \{0,1\}$ und $l \in \{0,1,2\}$

$$a_{k,l} = 0$$

und daher ist

$$f_1\cdot(Z_1^2 - Z_2^3) = \sum_{k,l=o}^{\infty} a_{k,l}Z_1^kZ_2^l = f$$

•• 8.3. Bemerkungen zur Gültigkeit weiterer Fortsetzungssätze für holomorphe Funktionen auf komplexen Räumen.

Wir wollen hier einige Resultate zitieren, um die Beziehungen des ersten RIEMANN'schen Hebbarkeitssatzes zu einer in gewissen Fällen optisch stärkeren und einer abgeschwächten Form zu erläutern; es werden statt dem rein technischen Begriff der "schwach holomorphen Funktion" zwei natürliche Holomorphiebegriffe betrachtet: einmal wird die (technische) Bedingung (SH2) von 1.2. im wesentlichen fallen gelassen und einmal wird sie durch den natürlichen topologischen Begriff der "Stetigkeit" ersetzt. Wir wollen (und können hier) jedoch meist nur zitieren und *nicht* beweisen. Nur zum Satz 8.3.1. wird eine Beweisskizze angegeben, da dieser Satz in 8.4.2. noch einmal wesentlich benutzt wird; mit der Normalisierung hat der Beweis allerdings nichts zu tun.

• 8.3.1. Satz

\- 2. RIEMANN'scher Hebbarkeitssatz auf normalen komplexen Räumen -

Vor.: Sei X ein normaler komplexer Raum und
$A \subseteq X$ eine analytische Menge mit $\dim_x A \le \dim_x X - 2 \quad \forall\, x \in A$.
$f\colon X\setminus A \to \mathbb{C}$ sei eine holomorphe Funktion

Beh.: f ist holomorph auf *ganz* X fortsetzbar.

Beweisskizze:

(1) Da es genügt, die holomorphe Fortsetzbarkeit von f lokal zu zeigen, können wir uns in X-Umgebungen von Punkten aus A zurückziehen.
Da weiterhin X als normaler komplexer Raum nach 1.5. lokal-irreduzibel ist, können wir nach dem Einbettungssatz von REMMERT-STEIN ([KR] (10.5)) X lokal als verzweigte analytische Überlagerung mit fester Blätterzahl darstellen.

Wir können also o.B.d.A. annehmen:

X ist eine lokalanalytische Menge in einem $\mathbb{C}^n$ und
es gibt eine verzweigte analytische Überlagerung $\alpha: X \to U$ mit
k Blättern. (U offen in $\mathbb{C}^n$)

Für jedes $z \in U$ sei
$\alpha^{-1}(z) =: \{x_1(z),\ldots,x_k(z)\} \subseteq X$;
dabei sei jeder Punkt aus $\alpha^{-1}(z)$ so oft aufgeführt, wie seine Verzweigungsordnung bzgl. α ist.

Nach dem REMMERT'schen Abbildungssatz (den wir in 8.6.2,(4) noch genauer zitieren werden) gilt für das Bild von A unter α:

$\alpha(A)$ ist eine analytische Menge in U und
$\dim \alpha(A) \leq n-2$

(2) Nun gibt es zu f
ein normiertes Polynom $p \in {}_U\mathcal{O}(U\setminus\alpha(A))[\vartheta]$ mit $p(f) = 0$ auf $X\setminus A$
(genauer: $p_1(f) = 0$, wobei $p_1 :=$ "$p\circ\alpha$" dasjenige Polynom in ϑ ist, dessen Koeffizienten die Liftungen mittels α der Koeffizienten von p sind.)

p wird natürlich definiert durch

$$p(z)(\vartheta) := \prod_{i=1}^{k} (\vartheta - f(x_i(z))) \qquad , z \in U\setminus\alpha(A).$$

Es ist zu zeigen, daß die Koeffizienten dieses Polynoms holomorphe Funktionen in $U\setminus\alpha(A)$ sind.

Das folgt wie üblich aus dem 1. RIEMANN'schen Hebbarkeitssatz (wie bei der entsprechenden Stelle im Beweis des Einbettungssatzes von REMMERT-STEIN in [KR] S. 92)

(3) Nach dem 2. RIEMANN'schen Hebbarkeitssatz sind
die Koeffizienten von p sogar in *ganz* U holomorph fortsetzbar.
Es gibt also

ein normiertes Polynom $p \in {}_U\mathcal{O}(U)[\vartheta]$ mit $p(f) = 0$ auf $X\setminus A$.

Da die Wurzeln eines normierten Polynoms stetig von seinen Koeffizienten abhängt, ist dann f lokal um Punkte aus A beschränkt, also kann man nach 1.3, (3) (man betrachte $A \cup X^{\times}$):

$f: X^{-} \to \mathbb{C}$ als schwach holomorphe Funktion auf X auffassen.

Da X ein normaler komplexer Raum ist, kann man dann sogar

$f: X \to \mathbb{C}$ holomorph auf ganz X erweitern.

• 8.3.2. Bemerkung

(1) Sei X ein normaler komplexer Raum.
Wir haben in 4.2. bewiesen, daß gilt

$$\dim_x X^\times \le \dim_x X - 2 \quad \forall\, x \in X^\times$$

Daher gilt nach dem 2. RIEMANN'schen Hebbarkeitssatz 8.3.1:
Jede holomorphe Funktion $f \in {}_X\mathcal{O}(X^-)$ läßt sich holomorph auf ganz X fortsetzen.

Man braucht sich also bei der Definition holomorpher Funktionen auf normalen komplexen Räumen um die singulären Punkte überhaupt nicht zu kümmern (nicht einmal eine Beschränktheitsforderung ist notwendig); besser kann man der Gewissensfrage nicht entgehen, wie Holomorphie zu definieren ist, ohne einfache, von der Theorie der komplexen Mannigfaltigkeiten her bekannte Charakterisierungen dieses Begriffes in verschiedene Begriffe aufspalten zu müssen.

(2) Mithin benötigt man zur Definition eines "normalen Punktes" eines komplexen Raumes den Begriff der "schwachen Holomorphie" überhaupt nicht:

Ein komplexer Raum X ist in einem Punkt $x \in X^\times$ genau dann normal, wenn für jede offene Umgebung U von x in X gilt:

Jede holomorphe Funktion $f \in {}_X\mathcal{O}(U^-)$ ist holomorph in x fortsetzbar.

(3) Es ist jetzt auch klar, daß für normale komplexe Räume die beiden RIEMANN'schen Hebbarkeitssätze äquivalent sind.

Damit ist auch der Wert von Normalisierungen für uns weiter gestiegen; um den 2. RIEMANN'schen Hebbarkeitssatz auf komplexe Räume zu verallgemeinern sind keine weiteren Konstruktionen nötig. Natürlich gilt der 2. RIEMANN'sche Hebbarkeitssatz *nicht* auf *beliebigen* komplexen Räumen:

Beispiel:

$$X := (\mathbb{C} \times \{(0,0)\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{C}^2)$$
$$= \{(Z_1,Z_2,Z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid Z_1Z_2 = 0\ ,\ Z_1Z_3 = 0\}$$

sei die Vereinigung der (Z_2,Z_3)-Ebene und der Z_1-Achse (vgl. [KA] §6 S.59/60). $X^\times = \{0\}$ ist eine analytische Menge in X mit $\dim_0 X^\times = 0 \le 2 = \dim_0 X$.

Man definiere nun (ähnlich wie in 1.4.)

$$f(z_1,z_2,z_3) := \begin{cases} 0 & , \text{ falls } z_2 = z_3 = 0 \\ 1 & , \text{ falls } z_1 = 0 \end{cases} \qquad ((z_1,z_2,z_3) \in X\setminus\{0\})$$

$f \in {}_X\mathcal{O}(X\setminus\{0\})$ ist natürlich *nicht* in $X^\times = \{0\}$ holomorph (nicht einmal stetig) fortsetzbar.

• 8.3.3. Maximalisierung lokal irreduzibler komplexer Räume

Sei X ein lokal irreduzibler komplexer Raum.
Dann läßt sich nach 8.2.1.
jede schwach holomorphe Funktion auf U (offen in X) *stetig* in ganz X fortsetzen.
Weiter ist nach 8.2.3.
die Normalisierung $\nu: X_1 \to X$ eine topologische Abbildung.

Man kann daher den Normalisierungssatz im lokal irreduziblen Fall auch so formulieren:
Es gibt eine
und bis auf biholomorphe Äquivalenz *nur* eine
topologische Abbildung $\mu: X_1 \to X$ mit den Eigenschaften:

a) X_1 ist ein komplexer Raum, so daß
jede stetige Funktion $f: U \to \mathbb{C}$ (U offen in X), welche in U^- holomorph ist, bereits in ganz U holomorph ist.

b) μ ist eine (eigentliche) Modifikation
mit der Ausnahmemenge $A \subseteq X$, welche ganz in $X^\times$ liegt.

Eine Abbildung μ mit diesen Eigenschaften heißt ganz allgemein eine "Maximalisierung".

• 8.3.4. Definition

- Maximale komplexe Räume -

Sei X ein komplexer Raum.

(1) Eine stetige Funktion $f: X \to \mathbb{C}$ heißt "stetig schwach holomorph auf X", falls $f|X^-$ holomorph ist.
Eine solche Funktion f (genauer: $f|X^-$) ist insbesondere schwach holomorph im Sinne der Definition 1.2.
Man definiert in suggestiver Weise Keime stetig schwach holomorpher Funktionen in Punkten aus X und somit
die Garbe ${}_X\hat{\mathcal{O}}$ der stetig schwach holomorphen Funktionskeime auf X.

Bemerkung: Die Begriffe "schwach holomorph" und "stetig schwach holomorph" sind echt verschieden:
Wir haben in 1.4, (1) auf dem Achsenkreuz eine schwach holomorphe Funktion angegeben, welche *nicht* stetig schwach holomorph ist.
Der Begriff der "stetig-schwachen-Holomorphie" ist aber auch nicht trivial:
Auf der NEIL'schen Parabel haben wir in 8.2.4, (3.1) eine stetig schwach holomorphe Funktion definiert, welche *nicht* holomorph ist.

(2) Ein Punkt $x \in X$ heißt "maximaler Punkt von X", wenn
in x der "schwache RIEMANN'sche Hebbarkeitssatz" anwendbar ist,

d.h. wenn jede stetig schwach holomorphe Funktion auf einer offenen X-Umgebung von x lokal um x bereits holomorph ist.

Es ist also

x maximaler Punkt von X $\iff$ ${}_X\hat{\mathcal{O}}_x = {}_X\mathcal{O}_x$.

X heißt "maximal" schlechthin, wenn X nur maximale Punkte enthält. Die Klasse der maximalen komplexen Räume umfaßt insbesondere die Klasse der normalen komplexen Räume.

Bemerkung: Die Begriffe "normal" und "maximal" sind echt verschieden: Das in 1.4. betrachtete Achsenkreuz ist zwar maximal aber *nicht* normal.
Andererseits ist aber der "Maximalitäts"-Begriff auch nicht trivial: Die in 8.2.4. betrachtete NEIL'sche Parabel ist *nicht* maximal.

(3) Eine topologische Abbildung μ: $X_1 \to X$ heißt "Maximalisierung von X", falls die Bedingungen a) und b) aus 8.3.3. erfüllt sind.
Bemerkung: Die Begriffe "Normalisierung" und "Maximalisierung" sind wieder echt verschieden:
Für das in 1.4. betrachtete Achsenkreuz ist die Identität zwar eine Maximalisierung, aber keine Normalisierung (eine Normalisierung haben wir in 2.0. angegeben).

- 8.3.5. Bemerkungen zum Maximalisierungssatz

Es gibt nun als Gegenstück zum Normalisierungssatz 7.7. auch einen Maximalisierungssatz; dieser besagt:

Zu jedem komplexen Raum X gibt es eine und bis auf biholomorphe Äquivalenz *nur* eine Maximalisierung (im Sinne von 8.3.4.) μ: $\hat{X} \to X$.

Im lokal irreduziblen Fall ist diese Aussage äquivalent zum Normalisierungssatz, wie wir in 8.3.3. gesehen haben (insbesondere liefert die in 8.2.4. besprochene Normalisierung der NEIL'schen Parabel auch gleich ein konkretes Beispiel für eine Maximalisierung).

Im allgemeinen Fall wird der Beweis der Existenzaussage des Maximalisierungssatzes (die Eindeutigkeitsaussage ist trivial!) auf den Normalisierungssatz zurückgeführt und ist somit eine Anwendung des Normalisierungssatzes (darum sprechen wir hier überhaupt über die Maximalisierung); die Maximalisierung ist nämlich ein Faktor der Normalisierung in folgendem Sinne (hier unbewiesen):
Ist ν: $X' \to X$ die Normalisierung von X (X ein komplexer Raum) und

$\mu\colon \hat{X} \to X$ die Maximalisierung von X,

dann gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d, "\nu"'] \arrow[dr, dashed, "\exists f \text{ holomorph}"] & \\ X & \hat{X} \arrow[l, "\mu"] \end{tikzcd}$$

(Man vergleiche dazu auch die Bemerkung 2) zu 2.6. !)

Die Beweisidee zur Konstruktion der holomorphen Abbildung $f\colon X' \to \hat{X}$ von der Normalisierung auf die Maximalisierung steckt in folgender einfachen Feststellung:

Sei $h \in {}_X\mathcal{O}'(U)$ (U offen in X) und

$h' \in {}_{X'}\mathcal{O}(\nu^{-1}(U))$ die holomorphe Fortsetzung von $h \circ \nu|\nu^{-1}(U^-)$ auf $\nu^{-1}(U)$.

Dann gilt:

$$h \in {}_X\hat{\mathcal{O}}(U) \iff h'(x') = h'(x'') \quad \forall\, x',x'' \in \nu^{-1}(x) \quad \forall\, x \in U$$

"$\Rightarrow$" trivial

"$\Leftarrow$" Sei $x \in U$.

Nach Lemma 8.2.1. läßt sich $(h)_x \in {}_X\mathcal{O}'_x$ jedenfalls auf jeder irreduziblen Komponente von $(X)_x$ als stetige Funktion auffassen. Daher folgt die Behauptung aus 8.2.2. Beweisteil "(iv) $\Rightarrow$ (i)":

"$(X)_x$ wird normalisiert durch Normalisierung seiner irreduziblen Komponenten."

$f\colon X' \to \hat{X}$ ist nun gerade diejenige Abbildung, welche die Punkte aus $\nu^{-1}(x)(\subseteq X')$ ($x \in X$) in geeigneter Weise "identifiziert"; dieses "Identifizieren" können wir hier jedoch nicht vorführen, da wir dazu erst sehr umfangreiche garbentheoretisch-analytische Hilfsmittel entwickeln müßten (vgl. etwa: CARTAN,H.: Quotients of complex analytic spaces. Contributions to Function Theory, S. 5 Theorem 2, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1960).

Wir wollen noch (ohne Beweis) bemerken, daß die Maximalisierung in folgender Hinsicht ein Funktor von der Kategorie der komplexen Räume in die Kategorie der maximalen komplexen Räume ist:

Jede holomorphe Abbildung zwischen komplexen Räumen läßt sich auf die Maximalisierung liften.

Eine entsprechende Aussage gilt für die Normalisierung *nicht*; das wollen wir jetzt an einem Beispiel belegen:

• 8.3.6. Beispiel

\- *Nicht*-Funktor-Eigenschaft der Normalisierung -

(0) Wir betrachten hier

$$X := \{(Z_1,Z_2,Z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid Z_1^2 - Z_2^2 Z_3 = 0\}.$$

Das ist eine analytische Menge im $\mathbb{C}^3$, also ein komplexer Raum.

Abmachung: Wir bezeichnen im folgenden Koordinatenfunktionen sowie Koordinaten im $\mathbb{C}^3$ mit Z_1,Z_2,Z_3 (groß), ihre Einschränkungen auf X mit z_1,z_2,z_3 (klein).

Also: $z_i = Z_i|X \quad (i = 1,2,3)$

Bemerkung: X enthält für $z_3 = z_2$ die in 8.2.4. behandelte NEIL'sche Parabel.

(1) Parametrisierungsversuch

Um eine geometrische Vorstellung von X zu bekommen, setzen wir einmal (analog dem Vorgehen bei der NEIL'schen Parabel) $Z_3 = Z^2$:

$$X = \{(Z_1,Z_2,Z^2) \in \mathbb{C}^3 \mid \underbrace{Z_1^2 - (ZZ_2)^2}_{= (Z_1 + ZZ_2)(Z_1 - ZZ_2)} = 0\}$$

$$= \{(ZZ_2,Z_2,Z^2) \mid Z,Z_2 \in \mathbb{C}\}$$

Man hat also eine surjektive holomorphe Abbildung

$$\Phi : \mathbb{C}^2 \ni (Z_1,Z_2) \longmapsto (Z_1Z_2,Z_2,Z_1^2) \in X$$

[Wir wollen sehen, daß Φ die Normalisierung von X ist.]

Außerhalb $\mathbb{C} \times 0$ (wir lassen die Mengenklammern bei $\{0\}$ der Einfachheit halber weg!) bildet Φ sogar biholomorph auf das Komplement von $(0,0) \times \mathbb{C}$ in X ab; man gibt die Umkehrabbildung sofort an:

$\Phi_{-1} := (\Phi|\ \mathbb{C}^2\setminus(\mathbb{C} \times 0) \rightarrow X\setminus((0,0) \times \mathbb{C}))^{-1}$ ist gegeben durch

$$\Phi_{-1}(z_1,z_2,z_3) = \left(\frac{z_1}{z_2},z_2\right) \quad , (z_1,z_2,z_3) \notin (0,0) \times \mathbb{C}$$

(man beachte, daß wegen $z_1^2 - z_2^2 z_3 = 0$ gilt:

$(z_1,z_2,z_3) \notin (0,0) \times \mathbb{C} \Rightarrow z_2 \neq 0$).

Insbesondere enthält $X\setminus((0,0) \times \mathbb{C})$ nur gewöhnliche Punkte von X und X ist in diesen Punkten 2-dimensional.

$(0,0) \times \mathbb{C}$ ist eine nirgends dichte analytische Menge in X

⌈Daß $X\setminus((0,0) \times \mathbb{C})$ dicht liegt in X, zeigt man sogleich mit Hilfe der Stetigkeit von Φ:

1) $Z_1 \underset{\neq}{\longrightarrow} 0$, $Z_2 \underset{\neq}{\longrightarrow} 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\Phi(Z_1,Z_2)}_{= (Z_1Z_2,Z_2,Z_1^2) \notin (0,0)\times\mathbb{C}} \longrightarrow \Phi(0,0) = (0,0,0)$$

2) Sei $Z \in \mathbb{C}$, $Z \neq 0$.

$Z_2 \underset{\neq}{\longrightarrow} 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\Phi(Z,Z_2)}_{= (ZZ_2,Z_2,Z^2) \notin (0,0)\times\mathbb{C}} \longrightarrow \Phi(Z,0) = (0,0,Z^2)$$

Die Untersuchung von $z_1 \circ \Phi_{-1}$ zeigt indessen, daß $(0,0) \times \mathbb{C}$ gerade die Menge der nichtnormalen Punkte von X ist:

$z_1 \circ \Phi_{-1}$ erfüllt nach Definition die ganze Gleichung

$$(z_1 \circ \Phi_{-1})^2 = z_3$$

(genauer: $z_3 | X \setminus ((0,0) \times \mathbb{C})$)

und ist deshalb schwach holomorph auf X

(aus $|z_1 \circ \Phi_{-1}| = {}_+\sqrt{|z_3|}$ folgt ja unmittelbar die lokale Beschränktheit von $z_1 \circ \Phi_{-1}$ um Punkte aus $(0,0) \times \mathbb{C}$).

Man überlegt sich nun, daß $z_1 \circ \Phi_{-1}$ weder a) in $(0,0,0)$ noch b) in einen anderen Punkt aus $(0,0) \times \mathbb{C}$ holomorph fortsetzbar ist:

a) Wir betrachten (analog dem Vorgehen bei der NEIL'schen Parabel) den Differenzenquotienten von $z_1 \circ \Phi_{-1}$ in der ersten Variablen an den beiden Punkten $(\pm z_1,z_2,z_3) \in X$, $z_1 \neq 0$ $(\Rightarrow z_2 \neq 0)$:

$$\frac{z_1 \circ \Phi_{-1}(z_1,z_2,z_3) - z_1 \circ \Phi_{-1}(-z_1,z_2,z_3)}{z_1 - (-z_1)} = \frac{1}{z_2}$$

Dieser Ausdruck ist in der Nähe von $(z_1,z_2,z_3) = 0$ unbeschränkt.

b) Sei nun $Z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Man überlegt sich, daß $z_1 \circ \Phi_{-1}$ nicht einmal stetig in $(0,0,Z^2)$ ($\in X$) fortgesetzt werden könnte:

Wegen der Stetigkeit von Φ gilt:

$$Z_2 \underset{\neq}{\longrightarrow} 0 \;\Rightarrow\; \underbrace{\Phi(\pm Z,Z_2)}_{= (\pm ZZ_2,Z_2,Z^2) \notin (0,0)\times\mathbb{C}} \longrightarrow \Phi(\pm Z,0) = (0,0,Z^2)$$

Wäre nun $z_1 \circ \Phi_{-1}$ stetig in $(0,0,Z^2)$ fortgesetzt, *dann* existierte also $\lim\limits_{Z_2 \underset{\neq}{\to} 0} z_1 \circ \Phi_{-1}(\Phi(\pm Z, Z_2)) = z_1 \circ \Phi_{-1}(0,0,Z^2)$

und der Grenzwert wäre unabhängig von der Wahl des Vorzeichens von Z!

Für $z_1 \circ \Phi_{-1}$ gilt aber nach Definition von Φ_{-1}

$$z_1 \circ \Phi_{-1}(\Phi(\pm Z, Z_2)) = \pm Z \qquad \forall\ Z_2 \neq 0$$

Da nichtnormale Punkte immer singulär sind und da $X \setminus ((0,0) \times \mathbb{C})$ nur gewöhnliche Punkte von X enthält, wissen wir nun:

$$\begin{aligned}(0,0) \times \mathbb{C} &= \text{Menge der nichtnormalen Punkte von } X \\ &= X^{\times}\end{aligned}$$

Nun ist auch klar, daß

$\Phi : \mathbb{C}^2 \to X$ die Normalisierung von X ist.

Wir betrachten noch das Verhalten von Φ über $X^{\times}$:

$\Phi | \mathbb{C} \times 0 \to X^{\times}$ $\quad (\Phi^{-1}(X^{\times}) = \mathbb{C} \times 0!)$ ist definiert durch

$\Phi(Z_1, 0) = (0,0,Z_1^2)$.

(2) *Beh.*: Man kann die kanonische Inklusion $X^{\times} \hookrightarrow X$

nicht auf die Normalisierungen liften.

Zunächst stellen wir fest, daß $X^{\times} = \mathbb{C} \times 0$ eine komplexe Mannigfaltigkeit ist und somit ein *normaler* komplexer Raum; also ist $\mathrm{Id}_{X^{\times}}$ eine Normalisierung von $X^{\times}$.

Nehmen wir nun an,

es gäbe eine holomorphe Abbildung $h: X^{\times} \to \mathbb{C}^2$,

welche Liftung der kanonischen Inklusion $X^{\times} \hookrightarrow X$

bzgl. der Normalisierungen ist,

d.h. für welche das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C}^2 \arrow[d, "\Phi"] \\ X^{\times} \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Dann ist $\Phi(h(X^{\times})) = X^{\times}$, also liegt $h(X^{\times}) \subseteq \Phi^{-1}(X^{\times}) = \mathbb{C} \times 0$; man braucht also nur die Kommutativität des eingeschränkten Diagramms

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{C} \times 0 \arrow[d, "\Phi|\ldots"] \\
X^\times \arrow[ur, dashed, "h|\ldots"] \arrow[r, "\mathrm{Id}_{X^\times}"'] \arrow[ur, phantom, "/\!/", shift right=4] & X^\times
\end{tikzcd}$$

zu untersuchen.

Wir haben $\Phi|\mathbb{C} \times 0 \to X^\times$ in (1) bereits explizit angegeben; das legt nahe, folgendes Diagramm zu betrachten:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{C} \arrow[d, dotted, "(Z,0)"] \\
 & \mathbb{C} \times 0 \arrow[d, "\Phi|\ldots"] \\
X^\times \arrow[ur, dashed, "h|\ldots"] \arrow[r, "\mathrm{Id}_{X^\times}"'] \arrow[d, dotted, "Z_3|X^\times"] & X^\times \arrow[d, dotted, "Z_3|X^\times"] \\
\mathbb{C} \arrow[r, dotted, "\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}"'] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Man stellt fest:

$$\mathrm{Id}_{X^\times} = (\Phi|\mathbb{C} \times 0 \to X^\times) \circ (h|X^\times \to \mathbb{C} \times 0)$$

d.h. $$\mathrm{Id}_{\mathbb{C}} = \underbrace{(Z_3|X^\times) \circ (\Phi|\ldots) \circ (Z,0)}_{\overset{=}{\text{Def.}\Phi}\ \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}^2} \circ \underbrace{(Z,0)^{-1} \circ (h|\ldots) \circ (Z_3|X^\times)^{-1}}_{=:\ h_1 \in {}_1\mathcal{O}(\mathbb{C})}$$

d.h. $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}^2 \circ h_1$ für eine holomorphe Funktion $h_1 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

So eine holomorphe Funktion h_1 gibt es aber *nicht* !

(3) Randbemerkung

Der Nachweis, daß sich die Normalisierung im allgemeinen nicht zu einem Funktor fortsetzen läßt, ist natürlich bereits erbracht. Wir wollen hier noch ganz unabhängig davon an X demonstrieren, wie geeignet eine Normalisierung (als explizit gegebene Teilparametrisierung) sein kann, um geometrische Eigenschaften komplexer Räume zu diskutieren; der Schlüssel

dazu liegt in den Aussagen 8.2.2./3.:
Wegen $\Phi^{-1}(0,0,Z^2) = \{Z,-Z\}$ $(Z \in \mathbb{C})$ ist

X in 0 irreduzibel und

$(X)_{(0,0,Z^2)}$ besteht für $Z \neq 0$ aus genau zwei irreduziblen Komponenten.

Insbesondere ist

Φ_{-1} stetig in $0 \in X$ fortsetzbar.

Da $\mathbb{C}^2$ zusammenhängend ist, ist

X (global) irreduzibel.

(Natürlich sind das keine tiefsinnigen Aussagen; man könnte sie hier genausogut mit Überlegungen wie in (1) direkt herleiten.)

•• 8.4. Analytische Mengen von der Codimension eins.

• 8.4.0. Vorbemerkung

Es lassen sich nicht alle Sätze, die für Mannigfaltigkeiten gelten, bedenkenlos auf komplexe Räume übertragen. Bevor wir in 8.6. mit Hilfe der Normalisierung ein Beispiel für die Verallgemeinerung eines Satzes bringen, wollen wir nun hier umgekehrt zeigen, daß die Normalisierung auch zur Konstruktion von Gegenbeispielen geeignet ist.

SERRE hat bewiesen: Wenn eine komplexe Mannigfaltigkeit X holomorph-vollständig ist, so ist das Komplement $X \setminus A$ einer rein 1-codimensionalen analytischen Menge A in X holomorph-konvex und somit ebenfalls holomorph vollständig.
(Siehe H. CARTAN's berühmten Vortrag: Variétés analytiques complexes et cohomologie. Colloque sur les fonctions de plusieurs variables. Centre belge de recherches mathématiques, Bruxelles 1953. Exemple 7. auf S. 50)

Ein entsprechender Satz gilt in normalen komplexen Räumen nicht allgemein, wie wir zeigen werden.

• 8.4.1. Definition

Sei X ein komplexer Raum (gemäß der Abmachung 7.6,(1)).
X heißt *holomorph-konvex*,
falls für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ auch die "holomorph-konvexe Hülle"

$$\hat{K} := \bigcap_{f \in {}_X\mathcal{O}(X)} \{x \in X \mid |f(x)| \leq \sup |f(K)|\}$$

wieder kompakt ist.

Da es in X eine normale Ausschöpfung gibt (vgl. 7.6,(2.2)), gilt - wie in der klassischen Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen - folgendes Kriterium (das hier ohne Beweis angegeben sei):

X ist genau dann holomorph-konvex,

wenn es zu jeder Punktfolge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in X, die in X *keinen* Häufungspunkt hat

eine (globale) holomorphe Funktion $f \in {}_X\mathcal{O}(X)$ gibt mit $\limsup_i |f(x_i)| = \infty$.

• <u>8.4.2.</u> Satz

Vor.: Sei X ein komplexer Raum.

A sei eine rein 1-codimensionale analytische Menge in X.

Es gebe in X eine reindimensionale analytische Menge B,

deren Durchschnitt $A \cap B \neq \emptyset$ ist,

aber höchstens von der Dimension $\dim B - 2$ ist.

Beh.: $X\setminus A$ ist *nicht* holomorph-konvex.

Beweis:

(1) Sei $x \in A \cap B$ ($\neq\emptyset$!).

Da $A \cap B$ nach Voraussetzung nirgends dicht liegt in B, läßt sich x als Grenzwert von Punkten aus $B\setminus A$ $(= B\setminus(A\cap B))$ schreiben:

$$x = \lim_i x_i \quad \text{für } x_i \in B\setminus A \quad \forall\, i.$$

Dann ist x natürlich der einzige Häufungspunkt der Folge $(x_i)_i$, insbesondere besitzt die Punktfolge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $X\setminus A$ *keinen* Häufungspunkt.

Nehmen wir nun an, $X\setminus A$ wäre holomorph-konvex, dann existiert (vgl. 8.4.1.)

eine in $X\setminus A$ holomorphe Funktion f mit $\limsup_i |f(x_i)| = \infty$.

(2) Sei nun $\nu\colon B_1 \to B$ die Normalisierung von B.

Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$f_1 := f\circ\nu : \overbrace{B_1\setminus\nu^{-1}(A\cap B)}^{\nu^{-1}(B\setminus A)\,=} \to \mathbb{C}.$$

f_1 ist auf *ganz* B_1 als holomorphe Funktion fortsetzbar.

[Da ν eine eigentliche Modifikation ist, vererben sich unter ν^{-1} die Dimensionseigenschaften von B und $A\cap B$:

B_1 ist reindimensional von der Dimension $\dim B$

(wir werden den einfachen Beweis in 8.5.2. nachtragen).

$\dim \nu^{-1}(A\cap B) \leq \dim B_1 - 2$

(Nach dem Abbildungssatz von REMMERT, den wir in 8.6.2,(4) noch genauer zitieren werden, gilt:

$$\dim \nu^{-1}(A \cap B) = \dim \nu(\nu^{-1}(A \cap B)) \underset{\text{triv.}}{=} \dim (A \cap B) \underset{\text{Vor.}}{\leq} \dim B - 2)$$

Da auf normalen komplexen Räumen der 2. RIEMANN'sche Hebbarkeitssatz gilt (vgl. 8.3.1.), ist dann

f_1 auf ganz B_1 als holomorphe Funktion fortsetzbar.

Wählen wir nun aus $\nu^{-1}(x_i)$ für jedes i einen Punkt aus:

$(x_{1,i})_{i \in \mathbb{N}}$ sei eine Punktfolge in $B_1 \backslash \nu^{-1}(A \cap B)$ mit $\nu(x_{1,i}) = x_i \quad \forall i$.

Dann ist

$f_1(x_{1,i}) = f \circ \nu(x_{1,i}) = f(x_i) \quad \forall i$, also nach (1)

$\limsup_i |f_1(x_{1,i})| = \infty$.

Da f_1 holomorph ist in *ganz* B_1, besitzt in diesem Fall die Punktfolge

$(x_{1,i})_i$ in B_1 *keinen* Häufungspunkt.

Da ν eigentlich ist, besitzt dann auch

$(x_i)_i = (\nu(x_{1,i}))_i$ in B *keinen* Häufungspunkt.

Widerspruch! (Nach (1) konvergiert $(x_i)_i$ in B.)

• 8.4.3. Bemerkung

(1) Sei die Situation wie in Satz 8.4.2.
Wir wollen auf elementare Weise einsehen, daß die Voraussetzungen für komplexe Mannigfaltigkeiten X sicher nicht erfüllt werden können:

A läßt sich nämlich in den Punkten von $A \cap B$ lokal *nicht* durch *eine* holomorphe Gleichung beschreiben.

[*Ließe* sich A in der Umgebung eines Punktes $x \in A \cap B$ durch *eine* holomorphe Gleichung beschreiben, dann würde aus [KA] (7.9) S. 84 (oder mehr unmittelbar aus [WH] Chap. 2 Sec. 12 Theorem 12C S. 70) folgen

$$\dim_x (A \cap B) \geq (\dim_x B - 1 =) \dim B - 1$$

Widerspruch!

Eine rein 1-codimensionale analytische Menge A in einer komplexen Mannigfaltigkeit ließe sich aber nach 9.9.2. lokal durch eine einzige holomorphe Gleichung beschreiben. Somit wissen wir jetzt sogar, daß $A \cap B$ *nur singuläre* Punkte von X enthält.

(2) Satz 8.4.2. liefert natürlich nur ein hinreichendes Kriterium für das in 8.4.1. angekündigte Gegenbeispiel; wir müssen erst an einem konkreten Beispiel zeigen, daß die Voraussetzungen von Satz 8.4.2. überhaupt erfüllbar sind. Das werden wir jetzt tun:

• 8.4.4. Beispiel

(0) Der "SEGRE-Kegel" wird definiert durch

$$X := \{(z_1,z_2,z_3,z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid z_1z_4 - z_2z_3 = 0\}$$

Das ist eine analytische Menge im $\mathbb{C}^4$, also ein komplexer Raum.

Bemerkungen zur geometrischen Betrachtung des SEGRE-Kegels:

a) X enthält für $z_4 = z_1$ das in 4.7. behandelte analytische Gebilde von $\sqrt{z_2z_3}$

b) Da X durch ein *homogenes* Polynom definiert wird, ist X ein Kegel (d.h. $\lambda x \in X \quad \forall x \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$):

Ist $z_4 \neq 0$, dann hat man

$$(z_1,\dots,z_4) \in X \iff \frac{z_1}{z_4} = \frac{z_2}{z_4}\cdot\frac{z_3}{z_4}$$

Also ist

$$X = \{\lambda\cdot(z_2z_3,z_2,z_3,1) \mid z_2,z_3,\lambda \in \mathbb{C}\} \cup \mathbb{C} \times \{0\} \times \mathbb{C} \times \{0\} \cup \mathbb{C}^2 \times \{(0,0)\}$$

eine Vereinigung komplexer Geraden durch den Nullpunkt $0 \in \mathbb{C}^4$.

Deutet man daher die Koordinaten des $\mathbb{C}^4$ als homogene Koordinaten des 3-dimensionalen komplex-projektiven Raumes $\mathbb{C}\,\mathbb{P}^3$, so geht der SEGRE-Kegel in eine algebraische Menge des $\mathbb{C}\,\mathbb{P}^3$ über, die in der algebraischen Geometrie seit langem bekannt ist und dort als SEGRE-Mannigfaltigkeit bezeichnet wird.

c) Nach einer Koordinatentransformation geht $z_1z_4 - z_2z_3$ in ein WEIERSTRASS-Polynom über, z.B.

$$\begin{array}{ll}
z_1' := z_2 & (\, z_1 = z_4' \\
z_2' := z_3 & z_2 = z_1' \\
z_3' := \dfrac{z_4 - z_1}{2} & z_3 = z_2' \\
z_4' := z_1 & z_4 = 2z_3' + z_4' \,)
\end{array}$$

In den gestrichenen Koordinaten ist

$$X = \{(z_1',\dots,z_4') \in \mathbb{C}^4 \mid z_4'^2 + (2z_3')z_4' + z_1'z_2' = 0\}$$

(1) Der SEGRE-Kegel ist eine analytische Hyperfläche im $\mathbb{C}^4$.

⌈Das folgt sofort aus *9*.9.2.
Man kann das aber auch leicht direkt einsehen:

$X \setminus \{0\}$ ist natürlich eine 3-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit.

(Außerhalb $0 \in \mathbb{C}^4$ läßt sich ja die Gleichung $z_1 z_4 - z_2 z_3$ lokal immer nach einer Variablen "auflösen".)

Falls $0 \in X$ singulär ist, dann ist nach Definition $\dim_0 X = 3$.

Falls $0 \in X$ gewöhnlich ist, dann gibt es dazu eine reindimensionale Umgebung mit nur gewöhnlichen Punkten; also ist auch dann $\dim_0 X = 3$.
⌊

Weiter ist der SEGRE-Kegel ein *normaler* komplexer Raum.

⌈Falls der Nullpunkt $0 \in X$ ein singulärer Punkt ist,

⌊dann ist er nach dem Kriterium 4.6. von OKA wenigstens noch normal.

Als analytische Menge im STEIN'schen komplexen Raum $\mathbb{C}^4$ ist der SEGRE-Kegel selbst ein STEIN'scher komplexer Raum.

(Zum Begriff des STEIN'schen komplexen Raumes vergleiche [BT] S. 137; wir wollen hier (einfache) Aussagen über STEIN'sche komplexe Räume *ohne* Beweis verwenden.)

(2) Sei $A := \mathbb{C}^2 \times \{(0,0)\}$,

$B := \{(0,0)\} \times \mathbb{C}^2$.

Die beiden analytischen Ebenen A und B sind analytische Mengen *in X*.
$A \cap B = \{0 \in \mathbb{C}^4\}$, also $\dim(A \cap B) = 0 = \dim B - 2$.

Somit erfüllen X, A und B genau die Voraussetzungen von Satz 8.4.2., und wir haben ein Gegenbeispiel dafür gefunden, daß sich die in 8.4.0. zitierte Aussage für komplexe Mannigfaltigkeiten auf beliebige komplexe Räume erweitern läßt. Im übrigen liefert uns 8.4.3. jetzt auch, daß $0 \in X$ ein singulärer Punkt ist.

• 8.4.5. Bemerkung

Wir wollen hier noch ohne Beweis ein Resultat zitieren zur Beständigkeit des Begriffes der holomorphen Vollständigkeit unter dem Normalisierungsprozeß:

Vor.: Sei X ein komplexer Raum und
$\nu\colon X_1 \to X$ die Normalisierung von X.

Beh.: X STEIN'sch $\Longleftrightarrow$ X_1 STEIN'sch

Dasselbe gilt übrigens auch für die Maximalisierung.
Der Beweis ist zwar eine echte Anwendung des Normalisierungssatzes, jedoch werden beim Beweis auch garbentheoretisch-analytische Hilfsmittel eingesetzt, die wir in unserem Rahmen nicht entwickeln können; siehe etwa [FI] 2.32. S. 127-130. (Diese Bemerkung fällt natürlich auch unter die Überschrift von Punkt 8.2.; wir haben jedoch den Punkt 8.4. für Bemerkungen über die holomorphe Vollständigkeit reserviert.)

•• 8.5. Komplex-analytisches Analogon zum "Hauptsatz von ZARISKI"

• 8.5.1. Definition

- stetige Modifikationen -

Seien X_1, X komplexe Räume.

In Abschwächung von 2.1. definieren wir:

Eine holomorphe Abbildung $\rho: X_1 \to X$ heißt *stetige Modifikation*,

wenn gilt: Es gibt analytische (Ausnahme-) Mengen $A_1 \subseteq X_1$, $A \subseteq X$,

so daß $X_1\setminus A_1$ und $X\setminus A$ dicht liegen in X_1 bzw. X und

$\rho|X_1\setminus A_1 \to X\setminus A$ biholomorph ist.

Bemerkungen: 1) Gewöhnlich werden stetige Modifikationen noch allgemeiner definiert: Es werden nicht nur analytische Ausnahmemengen in obigem Sinne betrachtet, sondern solche Ausnahmemengen, die obige Eigenschaften lokal besitzen; wir wollen uns jedoch mit obiger (globalen) Definition zufriedengeben, zumal da dadurch unsere Beweise übersichtlicher werden, ohne daß wesentliche Substanz verloren geht.

2) Ist $\rho: X_1 \to X$ eine stetige Modifikation und U offen in X, dann ist auch $\rho|\rho^{-1}(U) \to U$ eine stetige Modifikation.

[Seien $A_1 \subseteq X_1$ und $A \subseteq X$ die zu ρ gehörigen analytischen Ausnahmemengen.

Es genügt zu überlegen,

daß $\rho|\rho^{-1}(U)\setminus A_1 \to U\setminus A$ surjektiv ist.

$$\begin{aligned}\rho(\rho^{-1}(U)\setminus A_1) &= \{\rho(x_1) \mid \rho(x_1) \in U,\ x_1 \in X_1\setminus A_1\}\\ &= U \cap \rho(X_1\setminus A_1)\\ &= U\setminus A\end{aligned}$$

]

• 8.5.2. Lemma

Vor.: Seien X_1 und X komplexe Räume.

X sei *reindimensional*.

$\rho: X_1 \to X$ sei eine stetige Modifikation.

Beh.: Auch X_1 ist reindimensional und

$\dim X_1 = \dim X$

Beweis:

Wir haben zu zeigen, daß $\dim_{x_1} X_1 = \dim X \quad \forall\, x_1 \in X_1$.

Nach Definition der Dimension genügt es, die Formel für alle gewöhnlichen Punkte $x_1 \in X_1^-$ nachzurechnen.

Sei $A_1 \subseteq X_1$ die zu ρ gehörige Ausnahmemenge in X_1.

Da ρ außerhalb A_1 biholomorph ist, erhält es dort die Dimension:

$$\dim_{x_1} X_1 = \dim X \quad \forall\, x_1 \in X_1 \backslash A_1.$$

Sei nun $x_1 \in X_1^-$.

Dann gibt es

eine reindimensionale Umgebung $U_1 \subseteq X_1$ von x_1.

Da sowohl A_1 als auch $X_1^\times$ nirgends dicht in X_1 sind, ist auch ihre Vereinigung nirgends dicht in X_1 :

$$\overline{X_1^- \backslash A_1} \; (= \overline{X_1 \backslash (X_1^\times \cup A_1)} \;) = X_1.$$

Daher gibt es in U_1 einen Punkt $x_1' \in X_1 \backslash A_1$:

$$\exists\, x_1' \in U_1 \cap (X_1 \backslash A_1).$$

Zusammen:

$$\dim_{x_1} X_1 = \dim_{x_1'} X_1 = \dim X.$$

• 8.5.3. Satz (ZARISKI/ REMMERT)

Vor.: Seien X_1, X komplexe Räume und

$\rho: X_1 \to X$ eine stetige Modifikation.

Für ein (festes) $x_1 \in X_1$ gelte:

$\rho(x_1)$ ist ein normaler Punkt von X und

$\rho^{-1}(\rho(x_1))$ enthalte einen isolierten Punkt.

Beh.: $\rho^{-1}(\rho(x_1)) = \{x_1\}$ und

ρ ist über einer Umgebung von $\rho(x_1)$ biholomorph

(d.h. $\exists\ U(\rho(x_1)) \subseteq X$ mit: $\rho|\rho^{-1}(U) \to U$ biholomorph)

Beweis:

(1) (Beh.): Man kann o.B.d.A. X als reindimensionalen, normalen komplexen Raum annehmen.

Dann ist insbesondere X lokalirreduzibel.

Da der Satz lokal ist bzgl. $\rho(x_1) \in X$, können wir X ersetzen durch jede Umgebung U von $\rho(x_1)$; wir haben dann eben $\rho|\rho^{-1}(U) \to U$ zu betrachten.

Da $\rho(x_1)$ ein normaler Punkt von X ist und da die Menge der normalen Punkte offen ist, kann man zu $\rho(x_1)$ eine zusammenhängende Umgebung U mit nur normalen Punkten finden.

Normale komplexe Räume sind nach 1.5. lokal-irreduzibel.

Zusammenhängende lokal-irreduzible komplexe Räume sind wiederum reindimensional (vgl. [KA] (6.5) S. 62).

(2) Sei o.B.d.A. x_1 ein *isolierter* Punkt von $\rho^{-1}(\rho(x_1))$.

Dann gibt es nach einem topologischen Hilfssatz von STEIN ([KA] (7.6) S. 81) beliebig kleine Umgebungen $U_1(x_1) \subseteq X_1$ und $U(\rho(x_1)) \subseteq X$, so daß $\rho|U_1 \to U$ eine eigentliche Abbildung ist.

(Beh.): Zum Beweis des Satzes genügt es zu zeigen, daß für alle hinreichend kleinen U_1 mit obiger Eigenschaft gilt:

$\rho(U_1)$ ist offen in X,

$\rho|U_1 \to \rho(U_1)$ ist biholomorph und

U_1 liegt dicht in $\rho^{-1}(\rho(U_1))$.

Nehmen wir einmal an, wir hätten diese drei Aussagen für alle hinreichend kleinen U_1 bereits bewiesen!

Dann können wir zunächst eine Umgebung $V_1(x_1) \subseteq X_1$ wählen, so daß $\rho(V_1)$ offen ist in X und $\rho|V_1 \to \rho(V_1)$ biholomorph ist.

Da X_1 ein lokalkompakter HAUSDORFF-Raum ist, gibt es darin eine Umgebung $U_1(x_1) \subseteq X_1$, so daß $\overline{U_1} \subseteq V_1$.

Wir können U_1 so klein wählen, daß $\rho(U_1)$ offen ist in X, $\rho|U_1 \to \rho(U_1)$ biholomorph ist und

U_1 dicht liegt in $\rho^{-1}(\rho(U_1))$.

Dann liegt

$$\rho^{-1}(\rho(U_1)) = \overline{U_1} \cap \rho^{-1}(\rho(U_1)) \subseteq \overline{U_1} \subseteq V_1$$

$$\Rightarrow \rho|\rho^{-1}(\rho(U_1)) = (\rho|V_1) \mid \rho^{-1}(\rho(U_1)) \quad \text{ist injektiv}$$

$$\Rightarrow \rho^{-1}(\rho(U_1)) = U_1,$$

also gilt für $U := \rho(U_1)$:

U ist eine offene Umgebung von $\rho(x_1)$ in X und

$(\rho|\rho^{-1}(U) \to U) = (\rho|U_1 \to \rho(U_1))$ ist biholomorph.

(3) Seien nun $U_1(x_1) \subseteq X$ und $U(\rho(x_1)) \subseteq X$ beliebig vorgegebene *Karten*-umgebungen, so daß

$\rho_1 := (\rho|U_1 \to U)$ eine eigentliche Abbildung ist.

Nach den Ausführungen unter (2) genügt es, wenn wir im folgenden nur *Karten*umgebungen U_1 und U betrachten; dann können wir o.B.d.A. annehmen, daß U_1 und U lokalanalytische Mengen in gewissen Räumen $\mathbb{C}^n$ sind.

Dann ist ([KA] (7.4) S. 80)

ρ_1 sogar eigentlich *und diskret*.

In dieser Situation liefert das REMMERT'sche Offenheitskriterium für holomorphe Abbildungen ([KA] (7.14) S. 88), daß

ρ_1 eine offene Abbildung ist

[Nach (1) ist X lokal-irreduzibel und reindimensional, also ist auch

U lokal-irreduzibel und reindimensional $(\dim U = \dim X)$.

Nach Lemma 8.5.2. ist dann auch X_1 reindimensional von derselben Dimension wie X, also ist auch

U_1 reindimensional mit $\dim U_1 = \ (\dim X =)\ \dim U$.

Die Fasern von ρ_1 sind diskret, also nulldimensional.

Zusammen erhält man für die Faser*co*dimension von ρ_1:

$$\operatorname{codim}_y \rho_1^{-1}(\rho_1(y)) \underset{\text{Def.}}{=} \dim_y U_1 - \dim_y \rho_1^{-1}(\rho_1(y))$$

$$= \dim U \quad \forall\, y \in U_1$$

Dann ist nach dem zitierten Kriterium von REMMERT

ρ_1 eine offene Abbildung.]

Also ist jedenfalls

$\rho(U_1)$ offen in X.

Nun können wir o.B.d.A. annehmen, daß

$\rho_1 : U_1 \to X$ surjektiv ist

(sonst ersetze man eben zuerst U und X durch $\rho(U_1)$ und dann X_1 durch $\rho^{-1}(X)$; $\rho_1|U_1 \to \rho(U_1)$ ist ja auch eigentlich.)

Da ρ eine stetige Modifikation ist, ist dann aber nach einem Kriterium für eigentliche Modifikationen ([WH] Chap.6 Sec. 3 Theorem 3N (a), (b) S. 192)

$\rho_1 : U_1 \to X$ sogar eine eigentliche Modifikation

[Nach dem zitierten Kriterium haben wir nur festzustellen:

$\rho_1 : U_1 \to X$ ist eine eigentliche surjektive holomorphe Abbildung,

$(\rho_1|U_1\setminus A_1 \to \rho(U_1\setminus A_1)) = (\rho|U_1\setminus A_1 \to \rho(U_1\setminus A_1))$ ist biholomorph und

$U_1\setminus A_1$ ist offen und dicht in U_1.

($A_1 \subseteq X_1$ und $A \subseteq X$ seien dabei die zu ρ gehörigen Ausnahmemengen)]

(4) (Beh.): $\rho|U_1$ ist sogar biholomorph

Sei nun

$\nu : \tilde{U}_1 \to U_1$ die Normalisierung von U_1.

Da die Hintereinanderausführung eigentlicher Modifikationen wieder eine eigentliche Modifikation liefert (vgl. etwa 2.1,b)), ist dann

$\rho \circ \nu : \tilde{U}_1 \to X$ eine eigentliche Modifikation
(mit endlichen Fasern)
zwischen *normalen* komplexen Räumen.

Die Bemerkung zu 7.4. liefert:

$\rho \circ \nu : \tilde{U}_1 \to X$ ist biholomorph.

Dann ist aber

$\nu \circ (\rho \circ \nu)^{-1} : X \to U_1$ eine holomorphe Inverse von $\rho|U_1$.

(5) (Beh.): U_1 liegt dicht in X_1 $(= \rho^{-1}(X))$

Sei $A_1 \subseteq X_1$ die zu ρ gehörige Ausnahmemenge in X_1.

Wir wollen zeigen,

daß $X_1\setminus U_1 \subseteq A_1$.

(Dann ist ja $X_1 \setminus U_1$ mit A_1 nirgends dicht in X_1,
also U_1 dicht in X_1.)

$\rho|U_1$ biholomorph; es repräsentiere $\rho_1: X \to X_1$ die Umkehrung.

$\rho|X_1\setminus A_1 \to X\setminus A$ biholomorph; es repräsentiere $\rho_2: X\setminus A \to X_1$ die Umkehrung.

($A \subseteq X$ sei dabei die zu ρ gehörige Ausnahmemenge in X)

Wir betrachten die (gemeinsame) biholomorphe Abbildung $\rho|U_1\setminus A_1 \to \rho(U_1\setminus A_1)$; sie hat die Umkehrungen

$$\rho_1|\rho(U_1\setminus A_1) \to U_1\setminus A_1 \quad \text{und}$$

$$\rho_2|\rho(U_1\setminus A_1) \to U_1\setminus A_1 \quad ,$$

also ist

$$\rho_2|\rho(U_1\setminus A_1) = \rho_1|\rho(U_1\setminus A_1).$$

Es liegt

$$\rho(U_1\setminus A_1) \text{ dicht in } X\setminus A$$

$$\begin{aligned}\lceil \rho(U_1\setminus A_1) &= \rho(U_1\setminus(A_1 \cap U_1)) \\ &= \rho(U_1)\setminus\rho(A_1\cap U_1) \\ &\nwarrow_{\rho|U_1 \text{ injektiv}} \\ &= X\setminus\rho(A_1\cap U_1)\end{aligned}$$

Andererseits ist $\rho(U_1\setminus A_1) \subseteq \rho(X_1\setminus A_1) = X\setminus A$.

Zusammen:

$$\boxed{\rho(U_1\setminus A_1) = (X\setminus A)\setminus\rho(A_1\cap U_1)}$$

Nun liegt aber $\rho(A_1\cap U_1)$ nirgends dicht in X:

$$\overset{\circ}{\overline{\rho(A_1\cap U_1)}} = \overset{\circ}{\overline{\rho|U_1(A_1\cap U_1)}} = \rho|U_1\ (\overset{\circ}{\overline{A_1\cap U_1}})$$

(Abschluß- und Kernbildung bzgl. U_1!)

und das ist leer, da A_1 nirgends dicht in X_1 liegt,
$\lfloor$ also $A_1 \cap U_1$ nirgends dicht in U_1.

Da ρ_1 und ρ_2 auf $X\setminus A$ stetig definiert sind, ist dann

$$\rho_2 = \rho_1|X\setminus A$$

d.h. ρ_1 ist eine Fortsetzung von ρ_2 auf ganz X, und daher ist

$$\begin{aligned}X_1\backslash A_1 &= \rho_2(X\backslash A)\\ &= \rho_1(X\backslash A)\\ &= \underset{\rho_1 \text{ injektiv}}{\uparrow}\rho_1(X)\backslash\rho_1(A)\\ &= U_1\backslash\underbrace{\rho_1(A)}_{\substack{=(\rho|U_1)^{-1}(A)\\ =\rho^{-1}(A)\cap U_1}}\\ &= U_1\backslash\rho^{-1}(A)\end{aligned}$$

$\Rightarrow X_1\backslash A_1 \subseteq U_1$,

d.h. $X_1\backslash U_1 \subseteq A_1$.

• 8.5.4. Korollar

Vor.: Seien X_1 und X komplexe Räume und
ρ: $X_1 \to X$ eine stetige Modifikation mit den analytischen Ausnahmemengen

$A_1 \subseteq X_1$, $A \subseteq X$.

Jeder Punkt aus $X\backslash A$ sei ein normaler Punkt von X.

Beh.: $A_1 = \rho^{-1}(A)$

Bemerkung: Damit ist auch erneut die Bemerkung aus 7.3. bewiesen, daß eine Normalisierung ν: $X_1 \to X$ (X ein beliebiger komplexer Raum) *über* der Menge X^- der gewöhnlichen Punkte von X biholomorph ist. Dasselbe gilt, wenn man statt X^- die Menge der normalen Punkte von X einsetzt; alle unsere Beweise waren so angelegt, daß man an den entsprechenden Stellen statt X^- die Menge der normalen Punkte verwenden kann.

Beweis:
Nach Wahl von A_1 und A ist

$\rho|X_1\backslash A_1 \to X\backslash A$ eine biholomorphe Abbildung.

Dann ist

jeder Punkt $x_1 \in X_1\backslash A_1$ diskret in $\rho^{-1}(\rho(x_1))$

$\left[\begin{array}{l} X_1\backslash A_1 \text{ ist eine Umgebung von } x_1 \text{ in } X_1 \text{ und es gilt}\\ \rho^{-1}(\rho(x_1)) \cap (X_1\backslash A_1) = (\rho|X_1\backslash A_1 \to X\backslash A)^{-1}(\rho(x_1)) = x_1\end{array}\right.$

In dieser Situation liefert Satz 8.5.3. :

$$\rho^{-1}(\rho(x_1)) = \{x_1\} \qquad \forall\ x_1 \in X_1\backslash A_1$$

$$\Rightarrow \rho^{-1}(\underbrace{\rho(X_1\backslash A_1)}_{= X\backslash A}) = X_1\backslash A_1$$

$$\text{d.h. } A_1 = X_1\backslash \underbrace{\rho^{-1}(X\backslash A)}_{= X_1\backslash \rho^{-1}(A)} = \rho^{-1}(A)$$

Für die Anwendung in 8.6. stellen wir noch eine weitere, ähnliche Aussage bereit:

• 8.5.5. Korollar

Vor.: Sei X_1 ein komplexer Raum und

X ein *normaler* komplexer Raum.

$\rho: X_1 \to X$ sei eine stetige Modifikation.

$A_1 := \{x_1 \in X_1 \mid \rho \text{ ist } \textit{nicht} \text{ biholomorph bei } x_1\}$

Beh.: A_1 ist analytisch in X_1,

$\rho(X_1\backslash A_1)$ ist offen und dicht in X und

$\rho|X_1\backslash A_1 \to \rho(X_1\backslash A_1)$ ist biholomorph

Beweis:

(1) $x_1 \in X_1\backslash A_1 \underset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \rho$ ist biholomorph bei x_1

$\underset{8.5.3.}{\Longleftrightarrow} x_1$ liegt diskret in $\rho^{-1}(\rho(x_1)) \Longleftrightarrow \dim_{x_1} \rho^{-1}(\rho(x_1)) = 0$

$\underset{8.5.3.}{\Longleftrightarrow} \rho$ ist biholomorph über einer Umgebung von $\rho(x_1)$

(2) $A_1 \underset{(1)}{=} \{x_1 \in X_1 \mid \dim_{x_1} \rho^{-1}(\rho(x_1)) > 0\}$

ist analytisch in X_1 nach [KA] (9.3) S. 104.

$\rho(X_1\backslash A_1) \underset{(1)}{=} \rho(\{x_1 \in X_1 \mid \rho \text{ ist biholomorph über einer Umgebung von } \rho(x_1)\})$

$= \{x \in X \mid \rho \text{ ist biholomorph über einer Umgebung von } x\}$

ist offen in X.

Nun ist sicher $\rho|X_1\backslash A_1 \to \rho(X_1\backslash A_1)$ biholomorph.

Seien nun $A_1' \subseteq X_1$ und $A' \subseteq X$ zu ρ gehörige analytische Ausnahmemengen.

Dann liegt $A_1 \subseteq A_1'$ und es gilt

$\overline{\rho(X_1 \setminus A_1)} \supseteq \overline{\rho(X_1 \setminus A_1')} = \overline{X \setminus A'} = X.$ q.e.d.

In 8.6. werden wir mit ZARISKI's Satz 8.5.3. noch ein tiefliegendes Resultat beweisen.

Der natürliche Anwendungsbereich für Satz 8.5.3. ist freilich die Theorie der meromorphen Abbildungen. Man kann diesen Satz sogar ganz einfach in eine Aussage über meromorphe Abbildungen umformen; wir wollen das jedoch nicht tun, sondern noch ein einfacheres konkretes Anwendungsbeispiel bringen:

• 8.5.6. Korollar

Vor.: Sei X ein normaler komplexer Raum und

$f: D \to \mathbb{C}\mathbb{P}$ eine meromorphe Funktion auf X (D offen und dicht in X).

$x \in X$

Beh.: f unbestimmt in $x \iff \{\lim_i f(x_i) \mid (x_i)_i \subseteq D,\ x_i \to x\} = \mathbb{C}\mathbb{P}$

(Natürlich sind in dieser Mengenklammer nur solche gegen x konvergente Folgen $(x_i)_i$ zu betrachten, für welche die Folge $(f(x_i))_i$ tatsächlich konvergiert.)

Beweis:

Bekanntlich sind für die holomorphe Funktion $f: D \to \mathbb{C}\mathbb{P}$ folgende Aussagen gleichwertig (vgl. etwa [WH] Chap. 6 Sec. 3 Theorem 3D und Theorem 3M S. 191/192):

(i) f ist meromorph auf X

(ii) a) Der abgeschlossene Graph

$$G := \overline{\{(x,f(x)) \mid x \in D\}} \quad \text{(Abschluß in } X \times \mathbb{P}\text{)}$$

ist analytisch in $X \times \mathbb{C}\mathbb{P}$ *und*

b) die Projektion

$$\rho := (pr: X \times \mathbb{C}\mathbb{P} \to X)|G$$

ist eine stetige Modifikation

(Man beachte dazu:

Da $\mathbb{C}\mathbb{P}$ kompakt ist, ist ρ von selbst eine eigentliche Abbildung)

f heißt nun unbestimmt in $x \in X$, falls $\rho^{-1}(x)$ mehr als einen Punkt enthält.

$$\rho^{-1}(x) \underset{\text{Def.}}{=} \{x\} \times \{\lim_i f(x_i) \mid (x_i)_i \subseteq D,\ x_i \to x\}.$$

Da X ein normaler komplexer Raum ist, liefert ZARISKI's Satz 8.5.3. :

$$f \text{ unbestimmt in } x \underset{\text{Def.}}{\iff} \rho^{-1}(x) \text{ enthält } \textit{mehr} \text{ als einen Punkt}$$

$$\underset{8.5.3.}{\iff} \rho^{-1}(x) \text{ enthält } \textit{keinen diskreten} \text{ Punkt}$$

$$\iff \rho^{-1}(x) = \{x\} \times \mathbb{C}\,\mathbb{P}$$

⌈"⇒" $\rho^{-1}(x)$ ist ja eine analytische Menge in $\{x\} \times \mathbb{C}\,\mathbb{P}$ Man beachte nun, daß eine analytische Menge in $\mathbb{C}\,\mathbb{P}$, welche *einen* Punkt von $\mathbb{C}\,\mathbb{P}$ *nicht* enthält (o.B.d.A. den unendlich fernen), einer kompakten analytischen Menge in $\mathbb{C}$ entspricht; eine solche analytische Menge würde aber nur aus endlich vielen Punkten bestehen. !
⌊

•• 8.6. Reinkodimensionalität der Verzweigungsmenge bei eigentlichen stetigen Modifikationen von komplexen Mannigfaltigkeiten.

• 8.6.1. Vorbemerkung

Die wichtigste Modifikation eines komplexen Raumes erhält man durch "Aufblasen" eines Teilraumes. In der algebraischen Geometrie heißt dieser Vorgang "monoidale Transformation"; in der komplexen Analysis wurde diese Methode von HOPF als "σ-Prozess" eingeführt. Im Falle einer σ-Modifikation mit analytisch dünnem Zentrum

$\rho\colon X_1 \to X$ (X_1 und X komplexe Räume) ,

ist die (analytische) Ausnahmemenge $\{x_1 \in X_1 \mid \rho \text{ ist nicht biholomorph bei } x_1\}$ immer eine analytische Hyperfläche, also rein 1-codimensional. In diesen Zusammenhang gehört das folgende allgemeine Resultat:

• 8.6.2. Satz

Vor.: Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit und

$\rho\colon X_1 \to X$ eine eigentliche stetige Modifikation (X_1 ein komplexer Raum) (d.h. eine stetige Modifikation und eigentliche Abbildung; wir wählen hier diese etwas längliche Begriffsbildung, um keine Verwirrung zu stiften: den Begriff der "eigentlichen Modifikation" haben wir in 2.1. bereits etwas eng festgelegt.)

$A_1 := \{x_1 \in X_1 \mid \rho$ ist *nicht* biholomorph bei $x_1\}$

ist eine analytische Menge in X_1 nach 8.5.5.

Beh.: A_1 ist entweder leer

oder rein 1-codimensional

Beweis:

(0) Vorbemerkung

Wir zeigen nur, wie sich der Satz mit Hilfe der Normalisierung auf den Fall, daß X_1 normal ist, zurückführen läßt; d.h. wir nehmen an:

Ist X_1 ein *normaler* komplexer Raum, *dann* ist der Satz richtig.

Wir verweisen für diese tiefliegende Aussage auf die Literatur:

GRAUERT, H. und REMMERT, R.: Zur Theorie der Modifikationen I. Stetige und eigentliche Modifikationen komplexer Räume. Math. Ann. 129, 274 - 296 (1955)

oder:

KERNER, H.: Bemerkungen zu einem Satz von H. Grauert und R. Remmert. Math. Ann. 157, 206 - 209 (1964)

(Aus dieser Arbeit sind auch unsere weiteren Überlegungen entnommen.)

(1) (Beh.): Man kann o.B.d.A. X als irreduzibel annehmen.

Dann ist (nach 8.5.2.) insbesondere X_1 reindimensional.

Sei nämlich $a_1 \in A_1$ vorgegeben.

Nun betrachte man diejenige (natürlich eindeutig bestimmte) irreduzible Komponente (= Zusammenhangskomponente) X' von X, welche $\rho(a_1)$ enthält.

Dann ist $\rho^{-1}(X')$ eine offene Umgebung von a_1, also

$$\operatorname{codim}_{a_1} A_1 = \operatorname{codim}_{a_1} (A_1 \cap \rho^{-1}(X')).$$

Daher können wir

X ersetzen durch X' und

X_1 ersetzen durch $\rho^{-1}(X')$

(2) Sei $\nu: \tilde{X}_1 \to X_1$ die Normalisierung von X_1.

Dann ist auch $\rho \circ \nu: \tilde{X}_1 \to X$ eine eigentliche stetige Modifikation (vgl. etwa [WH] Chap. 6 Sec. 4 Theorem 4F, S. 194)

(Beh.): Für $x' \in \tilde{X}_1$ gilt:

$$\rho \text{ ist biholomorph bei } \nu(x') \iff \rho \circ \nu \text{ ist biholomorph bei } x'$$

"$\Rightarrow$" $x := \nu(x')$

Sei $U(x) \subseteq X$ so, daß

$\rho \mid U \to \rho(U)$ biholomorph ist.

Nun betrachte man

$$(\rho \circ \nu) \mid \nu^{-1}(U) \to \rho(U) = \underbrace{(\rho \mid U \to \rho(U))}_{\text{biholomorph}} \circ \underbrace{(\nu \mid \nu^{-1}(U) \to U)}_{\substack{\text{eigentliche Modifikation} \\ \text{(mit endlichen Fasern)}}}$$

Also ist die betrachtete Abbildung
eine eigentliche Modifikation (mit endlichen Fasern)
zwischen den *normalen* komplexen Räumen $\nu^{-1}(U)$ und $\rho(U)$
(X ist Mannigfaltigkeit!)

Mithin ist (vgl. die Bemerkung zu 7.4.)

$(\rho \circ \nu) \mid \nu^{-1}(U) \to \rho(U)$ biholomorph.

"$\Leftarrow$" Da $\rho \circ \nu$ in einer Umgebung von x' injektiv ist, ist

x' ein isolierter Punkt von $(\rho \circ \nu)^{-1}(\rho \circ \nu)(x')$.

Dann ist nach dem komplex-analytischen Analogon zum Hauptsatz von ZARISKI 8.5.3.

$\rho \circ \nu$ sogar über einer Umgebung von $\rho \circ \nu(x')$ biholomorph:

$$\exists\, U(\rho\circ\nu(x')) \subseteq X \text{ mit : } \quad (\rho \circ \nu) \mid \underbrace{(\rho \circ \nu)^{-1}(U)}_{= \nu^{-1}(\rho^{-1}(U))} \to U \quad \text{biholomorph}$$

Wegen der Surjektivität von ρ ist $U = \rho(\rho^{-1}(U))$; wir setzen

$U_1 := \rho^{-1}(U)$, eine offene Umgebung von $\nu(x')$.

Dann ist

$\rho(U_1)$ $(= U)$ offen in X und

$\rho \circ \nu \mid \nu^{-1}(U_1) \to \rho(U_1)$ biholomorph.

Nun betrachte man

$$(\nu \mid \nu^{-1}(U_1) \to U_1) \circ [(\rho\circ\nu) \mid \nu^{-1}(U_1) \to \rho(U_1)]^{-1} : \rho(U_1) \to U_1 .$$

Das isteine holomorphe Inverse zu $\rho \mid U_1 \to \rho(U_1)$!

(3) Nach (2) ist nun

$$A_1 \underset{\text{Def.}}{=} \{x_1 \in X_1 \mid \rho \text{ ist } \textit{nicht} \text{ biholomorph bei } x_1\}$$

$$= \nu(\{x' \in \tilde{X}_1 \mid \rho \text{ ist } \textit{nicht} \text{ biholomorph bei } \nu(x')\})$$

$$\underset{(2)}{=} \nu(\{x' \in \tilde{X}_1 \mid \rho \circ \nu \text{ ist } \textit{nicht} \text{ biholomorph bei } x'\}),$$

also:

$$A_1 = \nu(\tilde{A}_1) \text{ mit } \tilde{A}_1 := \{x' \in \tilde{X}_1 \mid \rho \circ \nu \text{ ist } \textit{nicht} \text{ biholomorph bei } x'\}.$$

Nach (0) ist

$\tilde{A}_1$ entweder leer
oder rein 1-codimensional.

Wenn $\tilde{A}_1$ leer ist, dann ist auch $A_1 = \nu(\tilde{A}_1)$ leer.

Sei also o.B.d.A. $\tilde{A}_1$ rein 1-codimensional.

Da X_1 reindimensional ist, ist nach 8.5.2. auch

$\tilde{X}_1$ reindimensional und $\dim \tilde{X}_1 = \dim X_1$.

Mithin ist

$\tilde{A}_1$ reindimensional und $\dim \tilde{A}_1 = \dim X_1 - 1$

(4) (Beh.): $\nu(\tilde{A}_1)$ ist reindimensional und $\dim \nu(\tilde{A}_1) = \dim \tilde{A}_1$

(Wenn wir das gezeigt haben, sind wir wegen (3) fertig)

Zum Beweis verwenden wir den

Abbildungssatz von REMMERT:

Sei $\varphi\colon Y_1 \to Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung,
Y_1, Y komplexe Räume.

$A \subseteq Y_1$ sei eine analytische Menge.

Beh.: (i) $\varphi(A)$ ist analytisch in Y und

$$\dim \varphi(A) = \sup_{a \in A} (\dim_a A - \dim_a \varphi^{-1}(\varphi(a)))$$

(ii) A irreduzibel $\Rightarrow \varphi(A)$ irreduzibel

(siehe z.B. [WH] Chap. 5 Sec. 4 S. 150 - 152)

Nach (i) von REMMERT's Abbildungssatz ist zunächst mal

$$\dim \nu(\tilde{A}_1) = \sup_{a' \in \tilde{A}_1} (\dim_{a'} \tilde{A}_1 - \underbrace{\dim_{a'} \nu^{-1}(\nu(a'))}_{=0}) = \dim \tilde{A}_1$$

Sei nun $\tilde{A}_1 = \bigcup_i \tilde{B}_i$ eine Zerlegung von $\tilde{A}_1$ in irreduzible Komponenten.

Dann sind nach REMMERT's Abbildungssatz

alle $\nu(\widetilde{B}_i)$ irreduzible (also reindimensionale) analytische Mengen in X_1 und

$$\dim \nu(\widetilde{B}_i) = \sup_{b'\in\widetilde{B}_i} (\underbrace{\dim_{b'} \widetilde{B}_i}_{= \dim \widetilde{A}_1} - \underbrace{\dim_{b'} \nu^{-1}(\nu(b'))}_{= 0}) = \dim \widetilde{A}_1$$

Mithin sind die $\nu(\widetilde{B}_i)$ gerade die irreduziblen Komponenten von $\nu(\widetilde{A}_1)$ und $\nu(\widetilde{A}_1)$ ist *reindimensional* von der Dimension $\dim \widetilde{A}_1$.

9. Anhang

- Algebraische Methoden -

Wir wollen in diesem Anhang die etwas spezielleren Sätze aus der Algebra, die wir benutzt haben, verifizieren, um sicherzustellen, welche algebraischen Hilfsmittel benötigt wurden. Wie in der algebraischen Geometrie sind ja auch hier durch Verwendung von Sätzen algebraischer Natur nur formale Anteile der Beweise abgespalten worden. Es ist daher natürlich, diese formalen Teile in die großen Beweise miteinzubeziehen; wir tun dies, um die Übersicht nicht zu verlieren, vernünftigerweise in einem Anhang.

In einem ersten Abschnitt werden wir uns mit verallgemeinerten Quotientenringen befassen. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß dies zum Verständnis des KUHLMANN'schen Beweises der Normalisierung, wie er zuerst veröffentlicht wurde, *nicht* notwendig ist. Jedoch lassen sich die im folgenden allgemeiner formulierten Sätze mit demselben Aufwand beweisen wie die Aussagen für Quotientenringe etwa über Integritätsbereichen.

•• 9.1. Verallgemeinerte Quotientenringe und ihre Ideale

• 9.1.1. Existenz und Eindeutigkeit

(1) Gegeben: R kommutativer Ring mit Einselement.

M multiplikativ abgeschlossenes System in R, das die Null nicht enthält. (M darf Nullteiler enthalten!)

Gesucht: Ein möglichst kleiner Ring R_M und ein möglichst großer Homomorphismus $h: R \to R_M$ (möglichst groß heißt, daß h(R) möglichst groß sein soll), so daß h(m) Einheit ist $\forall\, m \in M$.

Bemerkung: Falls M keine Nullteiler enthält, erfüllt diese Forderung der gewöhnliche Quotientenring $\frac{R}{M}$ und die Einbettung von R darin. Man kann das Konzept des gewöhnlichen Quotientenringes so interpretieren, daß darin jedes Element von M eine Einheit wird und R darin einbettbar ist. Im allgemeinen Fall haben wir die Forderung der Einbettbarkeit eingeschränkt.

(2) Nehmen wir an, so ein Ring R_M und ein Homomorphismus h existieren. Dann ist die algebraische Struktur von h bestimmt durch h(R) und h(M):

Es muß sein $h(R) \subseteq R_M$ und

$h(M)$ enthält nur Einheiten von R_M.

Also muß $\frac{h(R)}{h(M)} \subseteq R_M$.

Da $\frac{h(R)}{h(M)}$ bereits alle Forderungen erfüllt und R_M der kleinste Ring ist, der allen Forderungen genügt, ist $R_M = \frac{h(R)}{h(M)}$.

Nach dem Homomorphiesatz für Ringe ist dann

$$R_M \cong \frac{R/h^{-1}(0)}{M+h^{-1}(0)} .$$

$h^{-1}(0)$ ist nun dadurch bestimmt, daß $h(M) \subseteq R_M^\times$ liegt und h größtmöglich ist:

$$h(r) = 0 \iff h(r)\cdot h(m) = 0 \quad \text{für die } m \in M \text{ (oder: für ein } m \in M)$$

$$h(M) \subseteq R_M^\times$$

$$\iff h(r\cdot m) = 0 \quad \text{für ein } m \in M$$

Das ist etwa erfüllt, falls $rm = 0$ für ein $m \in M$.

Also gilt: $\mathfrak{a} := \{r \in R \mid rm = 0 \text{ für ein } m \in M\} \subseteq h^{-1}(0)$.

Nun ist aber $\mathfrak{a}$ ein Ideal so, daß $M+\mathfrak{a}$ nur Einheiten enthält in $\frac{R/\mathfrak{a}}{M+\mathfrak{a}}$

(d.h. $M+\mathfrak{a}$ enthält keinen Nullteiler in $R/\mathfrak{a}$).

$$(r+\mathfrak{a})\cdot(m+\mathfrak{a}) = 0 \quad \text{für } r \in R,\ m \in M$$

$$\iff rm \in \mathfrak{a}$$

$$\iff r\underbrace{mm_1}_{\in M} = 0 \quad \text{für ein } m_1 \in M$$

$$\Rightarrow r \in \mathfrak{a}$$

$$\Rightarrow r+\mathfrak{a} = 0+\mathfrak{a}$$

Da $h^{-1}(0)$ das kleinste Ideal mit dieser Eigenschaft ist, muß gelten

$$h^{-1}(0) = \mathfrak{a}$$

Zusammen erhalten wir:

$$R_M \cong \frac{R/\mathfrak{a}}{M+\mathfrak{a}} \quad , \text{ wobei } \mathfrak{a} = \{r \in R \mid rm = 0 \text{ für ein } m \in M\}$$

Insbesondere ist R_M bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

(3) Man sieht leicht ein, daß obige Analyse auch eine Konstruktion von R_M liefert:

Setze $R_M := \frac{R/\mathfrak{a}}{M+\mathfrak{a}}$, wobei $\mathfrak{a} := \{r \in R \mid rm = 0 \text{ für ein } m \in M\}$

und h die Fortsetzung auf R_M des kanonischen Homomorphismus $h'\colon R \to R/\mathfrak{a}$.

Also gilt:

Es existiert genau eine Lösung unserer Aufgabe, genauer:

$\exists_1\ R_M$ Ring, $\exists_1\ h: R \to R_M$, so daß

1) $h^{-1}(0) = \{r \in R \mid rm = 0 \text{ für ein } m \in M\}$

2) $h(m)$ Einheit in $R_M \quad \forall\, m \in M$

3) $R_M = \dfrac{h(R)}{h(M)}$

Zur Abkürzung schreiben wir im folgenden auch $\overline{r}$ für $h(r)$ $(r \in R)$.
Um den nächsten Satz leichter formulieren zu können, führen wir noch zwei Begriffe ein:

(4) Definition

Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal in R, dann bezeichnen wir mit

$\mathfrak{a}^e := h(\mathfrak{a})\cdot R_M$ das "Erweiterungsideal von $\mathfrak{a}$ in R_M".

Ist $\mathfrak{a}'$ ein Ideal in R_M, dann bezeichnen wir mit

$\mathfrak{a}'^c := h^{-1}(\mathfrak{a}')$ das "Verengungsideal von $\mathfrak{a}'$ in R".

• 9.1.2. Ideale in verallgemeinerten Quotientenringen.

Vor.: Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement.
M sei ein multiplikatives System in R, das die 0 nicht enthält.
$\overline{}: R \to R_M$ sei der kanonische Homomorphismus.

Beh.: (1) Für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ in R gilt:

$$\mathfrak{a}^{ec} = \{r \in R \mid rm \in \mathfrak{a} \text{ für ein } m \in M\}.$$

Für Primär- (und damit auch für Prim-) Ideale $\mathfrak{q}$ in R gilt:

$$\mathfrak{q}^{ec} = \mathfrak{q}\ , \text{ falls } M \cap \mathfrak{q} = \emptyset$$

(wegen dieser Bedingung siehe auch (3)).

(2) Für jedes Ideal $\mathfrak{a}'$ in R_M gilt:

$$\mathfrak{a}'^{ce} = \mathfrak{a}',$$

insbesondere ist jedes Ideal in R_M ein erweitertes Ideal.

(3) Für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ in R gilt:

$$\mathfrak{a}^e \neq R_M \iff \mathfrak{a} \cap M = \emptyset.$$

Oder anders formuliert:

Für jedes Ideal $\mathfrak{a}'$ in R_M gilt:

$$\mathfrak{a}' \neq R_M \iff \mathfrak{a}'^c \cap M = \emptyset$$

(4) Für jedes Primärideal $\mathfrak{q}$ in R mit $\mathfrak{q} \cap M = \emptyset$ gilt:

$\mathfrak{q}^e$ ist primär,

$\mathfrak{p} \cap M = \emptyset$ und $\sqrt{\mathfrak{q}^e} = \mathfrak{p}^e$, wobei $\mathfrak{p} := \sqrt{\mathfrak{q}}$.

(5) Die Zuordnung

$$\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ Primideal in } R,\ \mathfrak{p} \cap M = \emptyset\} \ni \mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}^e \in \{\mathfrak{p}' \mid \mathfrak{p}' \text{ Primideal in } R_M,\ \mathfrak{p}' \neq R_M\}$$

ist bijektiv.

(6) Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in R mit $\mathfrak{p} \cap M = \emptyset$.
Die Zuordnung

$$\{\mathfrak{q} \mid \mathfrak{q} \text{ Primärideal in } R \text{ zu } \mathfrak{p}\} \ni \mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q}^e \in \{\mathfrak{q}' \mid \mathfrak{q}' \text{ Primärideal zu } \mathfrak{p}^e\}$$

ist bijektiv.

Beweis:

(1) Sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal in R.

$$r \in \mathfrak{a}^{ec} = \overline{\;\;\;}^{-1}(\bar{\mathfrak{a}}\cdot R_M)$$

$$\iff r \in R \ \wedge\ \bar{r} \in \bar{\mathfrak{a}}\cdot R_M = \frac{\bar{\mathfrak{a}}}{\bar{M}}$$

$$\iff r \in R \ \wedge\ \exists\, a \in \mathfrak{a},\ m_1 \in M :\ \bar{r} = \frac{\bar{a}}{\bar{m}_1}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \overline{rm_1 - a} = 0\\
&\iff rm_1 - a \in \overline{\;\;\;}^{-1}(0) = \{r \in R \mid rm = 0 \text{ mit } m \in M\}\\
&\iff (rm_1 - a)m_2 = 0 \text{ für ein } m_2 \in M\\
&\iff rm_1m_2 = am_2 \quad \text{für ein } m_2 \in M
\end{aligned}$$

$$\iff r \in R \ \wedge\ \exists\, a \in \mathfrak{a},\ m_1, m_2 \in M :\ \underbrace{rm_1m_2}_{=:\, m \in M} = \underbrace{am_2}_{\in\, \mathfrak{a}}$$

$$\iff r \in R \ \wedge\ \exists\, m \in M :\ mr \in \mathfrak{a}$$

$$\text{"}\Leftarrow\text{"}\quad mr \in \mathfrak{a} \Rightarrow \bar{r} \in \frac{\bar{\mathfrak{a}}}{\bar{m}} \subseteq \bar{\mathfrak{a}}\cdot R_M \Rightarrow r \in \overline{\;\;\;}^{-1}(\bar{\mathfrak{a}}\cdot R_M) = \mathfrak{a}^{ec}$$

Sei $\mathfrak{q}$ ein Primärideal in R mit $M \cap \mathfrak{q} = \emptyset$.

A: $\underbrace{\mathfrak{q}^{ec}}_{} \neq \mathfrak{q}$

$= \{r \in R \mid rm \in \mathfrak{q}$ für ein $m \in M\}$ (wie eben gezeigt wurde!)

$$\Longleftrightarrow \quad \{r \in R \mid mr \in \mathfrak{q} \quad \text{für ein } m \in M\} \nsubseteq \mathfrak{q}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \exists\, r \in R\colon \underbrace{(mr \in \mathfrak{q} \quad \text{für ein } m \in M) \ \wedge \ (r \notin \mathfrak{q})}$$

$$\Rightarrow \underbrace{m^{\rho}}_{\in M} \in \mathfrak{q} \quad \text{für ein } m \in M \qquad (\text{da } \mathfrak{q} \text{ primär})$$

$$\Rightarrow M \cap \mathfrak{q} \neq \emptyset \quad \text{↯}$$

(2) Sei $\mathfrak{a}'$ ein beliebiges Ideal in R_M.

Zu zeigen: $\mathfrak{a}'^{ce} = \mathfrak{a}'$.

"$\subseteq$" $\mathfrak{a}'^{ce} = \overline{\overline{}^{-1}(\mathfrak{a}')} \cdot R_M \subseteq \mathfrak{a}' \cdot R_M = \mathfrak{a}'$

"$\supseteq$" sei $\dfrac{\bar{a}}{\bar{m}} \in \mathfrak{a}'$

mit $a \in R$, $m \in M$.

$$\Rightarrow \bar{a} = \bar{m} \cdot \frac{\bar{a}}{\bar{m}} \in \mathfrak{a}'$$

$$\Rightarrow a \in \overline{}^{-1}(\mathfrak{a}') = \mathfrak{a}'^{c}$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{a}}{\bar{m}} \in \overline{\mathfrak{a}'^{c}} \cdot R_M = \mathfrak{a}'^{ce}$$

(3) Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in R

$$\mathfrak{a}^{e} = R_M \Longleftrightarrow \bar{1} \in \mathfrak{a}^{e}$$

$$\Longleftrightarrow 1 \in \overline{}^{-1}(\mathfrak{a}^{e}) = \mathfrak{a}^{ec} \underset{(1)}{=} \{r \in R \mid rm \in \mathfrak{a} \quad \text{für ein } m \in M\}$$

$$\Longleftrightarrow m \in \mathfrak{a} \quad \text{für ein } m \in M$$

$$\Longleftrightarrow \mathfrak{a} \cap M \neq \emptyset$$

Sei $\mathfrak{a}'$ ein Ideal in R_M

$$\mathfrak{a}' \neq R_M \underset{(2)}{\Longleftrightarrow} \mathfrak{a}'^{ce} \neq R_M \Longleftrightarrow \mathfrak{a}'^{c} \cap M = \emptyset \quad \text{(wie eben gezeigt wurde!)}$$

(4) Sei $\mathfrak{q}$ ein Primärideal in R mit $\mathfrak{q} \cap M = \emptyset$; $\mathfrak{p} := \sqrt{\mathfrak{q}}$

(4.1) (Beh.): $x' \cdot y' \in \mathfrak{q}^{e} \ \wedge \ x' \notin \mathfrak{p}^{e} \Rightarrow y' \in \mathfrak{q}^{e}$

Sei $\dfrac{\bar{x}}{\bar{m}_1} \cdot \dfrac{\bar{y}}{\bar{m}_2} \in \mathfrak{q}^{e}$, $\dfrac{\bar{x}}{\bar{m}_1} \notin \mathfrak{p}^{e}$

mit $x, y \in R$, $m_1, m_2 \in M$.

$$\Rightarrow \overline{xy} = \overline{m_1 m_2}\, \frac{\bar{x}}{\bar{m}_1} \frac{\bar{y}}{\bar{m}_2} \in \mathfrak{q}^{e}$$

und $\bar{x} \notin \mathfrak{p}^{e}$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy \in \text{---}^{-1}(q^e) = q^{ec} \underset{(1)}{=} q \\ \text{und } x \notin p = \sqrt{q} \end{cases}$$

$\Rightarrow\ y \in q$

$\Rightarrow\ \dfrac{\overline{y}}{\overline{m_2}} \in \overline{q} \cdot R_M = q^e$

(4.2) (Beh.): $p \cap M = \emptyset$, p^e prim und $p^e = \sqrt{q^e}$

A: $m \in p = \sqrt{q}$ für ein $m \in M$

$\Rightarrow\ m^\rho \in q$ für ein $m^\rho \in M$ ⨳ $(q \cap M = \emptyset)$

Setzt man in (4.1) speziell $q = p$, dann folgt sofort, daß p prim ist.

Bleibt zu zeigen: $p^e = \sqrt{q^e}$

"$\subseteq$" $p^e = (\sqrt{q})^e$

$= \overline{\sqrt{q}} \cdot R_M$

$= \{\dfrac{\overline{r}}{\overline{m}} \mid r \in R,\ m \in M,\ r^\rho \in q$ für ein $\rho \in \mathbb{N}\}$

$\subseteq \{\dfrac{\overline{r}}{\overline{m}} \mid r \in R,\ m \in M, \left(\dfrac{\overline{r}}{\overline{m}}\right)^\rho \in \underbrace{\overline{q}\cdot R_M}_{=\,q^e}$ für ein $\rho \in \mathbb{N}\}$

$= \sqrt{q^e}$

"$\supseteq$" Sei $r' \in \sqrt{q^e}$.

$\Rightarrow\ r'^\rho \in q^e$ für ein $\rho \in \mathbb{N}$.

Man wähle ρ minimal.

Ist $\rho = 1$, dann ist $r' = r'^\rho \in q^e \subseteq p^e$

Ist $\rho > 1$, dann gilt:

$r' \cdot r'^{\rho-1} \in q^e \wedge r'^{\rho-1} \notin q^e \Rightarrow r' \in p^e$ (sonst ⨳ zu (4.1))

(4.3) (Beh.): q^e primär

Sei $x' \cdot y' \in q^e$, $y' \notin q^e$

$\Rightarrow\ x' \in p^e \underset{(4.2)}{=} \sqrt{q^e}$ (sonst ⨳ zu (4.1))

$\Rightarrow\ x'^\rho \in q^e$ für ein $\rho \in \mathbb{N}$.

(5) Nach (3) und (4) ist die Abbildung wohldefiniert, d.h.

p Primideal in R, $p \cap M = \emptyset \Rightarrow p^e$ Primideal in R_M, $p^e \neq R_M$

Bleibt zu zeigen, daß die Abbildung bijektiv ist.

zur Injektivität:

Seien p_i prim in R mit $p_i \cap M = \emptyset$ (i=1,2).

$p_1^e = p_2^e \Rightarrow p_1 \underset{(1)}{=} p_1^{ec} = p_2^{ec} \underset{(1)}{=} p_2$.

zur Surjektivität:

Sei p' prim in R_M mit $p' \neq R_M$

Dann ist nach (2) $p' = (p'^c)^e$.

p'^c ist prim in R,

$$\begin{aligned} \text{denn: } x\cdot y \in p'^c &\Rightarrow \bar{x}\,\bar{y} \in p'^{ce} = p' \\ &\Rightarrow (\text{o.B.d.A.})\ \bar{x} \in p' \qquad (\text{da } p' \text{ prim}) \\ &\Rightarrow x \in \bar{\ }^{-1}(p') = p'^c \end{aligned}$$

Nach (3) ist $p'^c \cap M = \emptyset$.

(6) Nach (4) ist die Abbildung wohldefiniert, d.h.

q Primärideal in R zu $p \Rightarrow q^e$ Primärideal zu p^e.

Bleibt zu zeigen, daß die Abbildung bijektiv ist.

zur Injektivität:

Seien q_i primär zu p (i=1,2).

$q_1^e = q_2^e \Rightarrow q_1 \underset{(1)}{=} q_1^{ec} = q_2^{ec} \underset{(1)}{=} q_2$.

zur Surjektivität

Sei q' primär zu p^e.

Dann ist nach (2) $q' = (q'^c)^e$.

q'^c ist primär zu p ,

$$\begin{aligned} \text{denn: } xy \in q'^c,\ x \notin q'^c &\Rightarrow \bar{x}\,\bar{y} \in q',\ \bar{x} \notin q' \\ &\quad q'^c = \bar{\ }^{-1}(q') \\ &\Rightarrow \bar{y}^\rho \in q' \\ &\Rightarrow y^\rho \in \bar{\ }^{-1}(q') = q'^c \end{aligned},$$

also ist q'^c primär.

$$\begin{aligned} \sqrt{q'^c} &= \{x \in R \mid x^\rho \in q'^c \text{ für ein } \rho\} \\ &= \{x \in R \mid \bar{x}^\rho \in q' \text{ für ein } \rho\} \\ &= \bar{\ }^{-1}(\sqrt{q'}) = \bar{\ }^{-1}(p^e) = p^{ec} \underset{(1)}{=} p. \end{aligned}$$

• 9.1.3. Der Kern des kanonischen Homomorphismus für NOETHER'sche Grundringe

Vor.: Sei R ein NOETHER'scher Ring

$$(0) = \bigcap_{i=1}^{n} q_i \text{ sei eine Primärkomponentenzerlegung von (0) in R.}$$

M sei ein multiplikatives System in R, das die 0 nicht enthält.

$\bar{\ }: R \to R_M$ sei der kanonische Homomorphismus.

Beh.: $$\bar{\ }^{-1}(0) = (0)^{ec} = \bigcap_{\substack{q \text{ primär in } R \\ q \cap M = \emptyset}} q = \bigcap_{q_i \cap M = \emptyset} q_i$$

Beweis:

Wir zeigen: $$\bar{\ }^{-1}(0) \underset{(1)}{=} (0)^{ec} \underset{(2)}{\subseteq} \bigcap_{\substack{q \text{ primär in } R \\ q \cap M = \emptyset}} q \underset{(3)}{\subseteq} \bigcap_{q_i \cap M = \emptyset} q_i \underset{(4)}{\subseteq} \bar{\ }^{-1}(0)$$

(1) $\bar{\ }^{-1}(0) \underset{9.1.1,(3)}{=} \{r \in R \mid rm = 0 \text{ für ein } m \in M\} \underset{9.1.2,(1)}{=} (0)^{ec}$

(2) $(0)^{ec} \underset{\text{triv.}}{\subseteq} q^{ec} \underset{9.1.2,(1)}{=} q \quad \forall\, q$ primär in R mit $M \cap q = \emptyset$

(3) trivial

(4) $\left(\bigcap_{q_i \cap M \neq \emptyset} q_i\right) \cap M \neq \emptyset$

[Sei $m_i \in q_i \cap M$, falls $q_i \cap M \neq \emptyset$

$\Rightarrow \prod m_i \in \left(\bigcap_{q_i \cap M \neq \emptyset} q_i\right) \cap M$]

$\Rightarrow \exists\, m \in M$: $m \in \bigcap_{q_i \cap M \neq \emptyset} q_i$

$\Rightarrow \exists\, m \in M$: $rm \in \bigcap_{q_i \cap M \neq \emptyset} q_i \cap \bigcap_{q_i \cap M = 0} q_i = \bigcap_{i=1}^{n} q_i = (0) \quad \forall\, r \in \bigcap_{q_i \cap M = \emptyset} q_i$

$\Rightarrow \bigcap_{q_i \cap M = \emptyset} q_i \subseteq \{r \in R \mid rm = 0 \text{ für ein } m \in M\} \underset{9.1.1,(3)}{=} \bar{\ }^{-1}(0)$

•• 9.2. Erhaltungssätze beim Übergang zu Quotientenringen

In den ersten vier Punkten bringen wir wieder nur technische Hilfsmittel für die folgenden Abschnitte.

• 9.2.1. Lemma

Vor.: Sei R ein NOETHER'scher Ring

M sei ein multiplikatives System in R, das die 0 nicht enthält.

Beh.: R_M ist ein NOETHER'scher Ring

Beweis:

Sei $\mathfrak{a}'$ ein Ideal in R_M.
Nach 9.1.2,(2) ist $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'^{ce} = \overline{\mathfrak{a}'^{c}} \cdot R_M$
R NOETHER'sch $\Rightarrow$ $\mathfrak{a}'^{c}$ besitzt eine endliche R-Basis
$\Rightarrow$ $\mathfrak{a}'$ besitzt eine endliche R_M- Basis.

• 9.2.2. Lemma

Vor.: R sei ein Integritätsbereich, der ganz-abgeschlossen in seinem Quotientenkörper ist.

M sei ein multiplikatives System in R, das die 0 nicht enthält.

Beh.: $\frac{R}{M}$ ist ganz-abgeschlossen in seinem Quotientenkörper.

Beweis:

Sei $x \in \mathrm{Quot}(\frac{R}{M}) = \mathrm{Quot}\,(R)$, x ganz über $\frac{R}{M}$

$\Rightarrow \; x^n + \frac{a_{n-1}}{m_{n-1}} x^{n-1} + \ldots + \frac{a_o}{m_o} = 0$ mit $a_i \in R$, $m_i \in M$

$\Rightarrow \; x^n + \frac{r_{n-1}}{m} x^{n-1} + \ldots + \frac{r_o}{m} = 0$

wobei $r_j := (\prod\limits_{i \neq j} m_i) \cdot a_j \in R$, $m := \prod\limits_{j=o}^{n-1} m_j \in M$.

Multiplikation mit m^n liefert:

$\Rightarrow \; (mx)^n + r_{n-1}(mx)^{n-1} + \ldots + m^{n-1} r_o = 0$

$\Rightarrow$ mx ganz über R

$\Rightarrow$ $mx \in R$

$\Rightarrow$ $x \in \frac{R}{M}$

• 9.2.3. Lemma

- Erhaltung der Primärzerlegung -

Vor.: Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement.

$\mathfrak{a}$ sei ein Ideal in R, das eine unverkürzbare Zerlegung $\mathfrak{a} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ in Primärkomponenten gestattet.

M sei ein multiplikatives System in R, das die 0 nicht enthält.

$\bar{\ }: R \to R_M$ sei der kanonische Homomorphismus.

Beh.: $\mathfrak{a}^e = \bigcap_{\substack{i:\\ \mathfrak{q}_i \cap M = \emptyset}} \mathfrak{q}_i^e$ ist eine unverkürzbare Zerlegung von $\mathfrak{a}^e$ in Primärkomponenten.

Beweis:

(1) (Beh.): $\mathfrak{a}^e = \bigcap_{\substack{i:\\ \mathfrak{q}_i \cap M = \emptyset}} \mathfrak{q}_i^e$

Wegen 9.1.2,(3) genügt es zu zeigen: $\mathfrak{a}^e = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i^e$.

"$\subseteq$" $\mathfrak{a}^e = \overline{\mathfrak{a}} \cdot R_M = \left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{\mathfrak{q}_i}\right)\cdot R_M \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \overline{\mathfrak{q}_i}\cdot R_M = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i^e$

"$\supseteq$" Sei $a' \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i^e = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{\mathfrak{q}_i}\cdot R_M$

$\Rightarrow a' \in \overline{\mathfrak{q}_i}\cdot R_M \quad \forall\, i = 1,\dots,n$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} a' = \overline{q_1}\cdot \dfrac{\overline{r_1}}{\overline{m_1}} = \underbrace{\overline{q_1} \cdot \prod_{j\neq 1} \overline{m_j}\, \overline{r_1}}_{\in\, \overline{\mathfrak{q}_1}} \cdot \dfrac{1}{\overline{m_1}\cdot\ldots\cdot\overline{m_n}} & \text{mit } q_1 \in \mathfrak{q}_1 \\ \quad\vdots & \\ a' = \overline{q_n}\cdot \dfrac{\overline{r_n}}{\overline{m_n}} = \underbrace{\overline{q_n} \cdot \prod_{j\neq n} \overline{m_j}\, \overline{r_n}}_{\in\, \overline{\mathfrak{q}_n}} \cdot \dfrac{1}{\overline{m_1}\cdot\ldots\cdot\overline{m_n}} & \text{mit } q_n \in \mathfrak{q}_n \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \overline{m}\, a' \in \overline{\mathfrak{q}_i} \quad \forall\, i = 1,\dots,n \qquad$ mit $m = m_1\cdot\ldots\cdot m_n \in M$

$\Rightarrow \overline{m}\, a' \in \bigcap_{i=1}^{n} \overline{\mathfrak{q}_i} = \overline{\mathfrak{a}}$

$\Rightarrow a' \in \overline{\mathfrak{a}}\cdot R_M = \mathfrak{a}^e$

(2) Nach 9.1.2,(4) ist $\mathfrak{q}_i^e$ primär,

$\mathfrak{p}_i \cap M = \emptyset$ und $\sqrt{\mathfrak{q}_i^e} = \mathfrak{p}_i^e$, wobei $\mathfrak{p}_i := \sqrt{\mathfrak{q}_i}$; $\forall$ i mit $\mathfrak{q}_i \cap M = \emptyset$.

Dann sind die $\mathfrak{p}_i^e$ nach 9.1.2,(5) verschieden, falls $\mathfrak{q}_i \cap M = \emptyset$; somit ist die Zerlegung in (1) unverkürzbar.

- 9.2.4. Lemma

- Erhaltungssätze für Stellenringe -

Vor.: Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement

$\mathfrak{p}$ sei ein Primideal in R , $\mathfrak{p} \neq R$.

$R_{\mathfrak{p}} := R_{R\setminus\mathfrak{p}}$ sei die "Lokalisierung von R mit $\mathfrak{p}$"

(man beachte, daß $R\setminus\mathfrak{p}$ ein multiplikatives System in R ist, das die 0 nicht enthält; denn $\mathfrak{p}$ ist ein Primideal, das natürlich die 0 enthält.)

$\bar{\ }: R \to R_p$ sei der kanonische Homomorphismus

Beh.: (1) Für jedes Ideal a in R gilt:

$$a^e \neq R_p \iff a \subseteq p.$$

Oder anders formuliert:

Für jedes Ideal a' in R_p gilt:

$$a' \neq R_p \iff a'^c \subseteq p$$

(2) Die Zuordnung

$$\{a \mid a \text{ Primideal in } R,\ a \subseteq p\} \ni a \mapsto a^e \in \{a' \mid a' \text{ Primideal in } R_p,\ a' \neq R_p\}$$

ist bijektiv.

(3) Sei a ein Primideal in R mit $a \subseteq p$.
Die Zuordnung

$$\{b \mid b \text{ Primärideal in } R \text{ zu } a\} \ni b \mapsto b^e \in \{b' \mid b' \text{ Primärideal in } R_p \text{ zu } a^e\}$$

ist bijektiv.

(4) p^e ist *das* maximale Ideal von R_p

(5) Ist R NOETHER'sch und $(0) = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$ eine Primärkomponentenzerlegung von (0) in R,

dann gilt: $$\bar{\ }^{-1}(0) = \bigcap_{q_i \subseteq p} q_i.$$

Beweis:
(1) Spezialfall von 9.1.2,(3)
(2) Spezialfall von 9.1.2,(5)
(3) Spezialfall von 9.1.2,(6)
(4) Für jedes Ideal a' in R_p gilt nämlich:

$$a' \neq R_p \underset{(1)}{\iff} a'^c \subseteq p \Rightarrow a' \underset{9.1.2,(2)}{=} a'^{ce} \subseteq p^e.$$

Also ist p^e maximal und sogar das einzige maximale Ideal in R_p.
(5) Spezialfall von 9.1.3. q.e.d.

Mit dem folgenden Satz stellen wir ein wichtiges algebraisches Normalitätskriterium bereit. Diesen Satz werden wir im Hauptteil der Arbeit zweimal anwenden: In 4.6. werden wir damit einen algebraischen Beweis eines Normalitätskriteriums von OKA erbringen. In 5.12 können wir damit die Beweisidee des KUHLMANN'schen Beweises zur Offenheit der Menge der normalen Punkte eines komplexen Raumes algebraisch interpretieren. Zur Motivation der nun folgenden Voraussetzungen (*) und (**) siehe auch 9.5.2. bzw. 4.4.

• 9.2.5. Satz

Vor.: Sei R ein Stellenring
(d.h. ein NOETHER'scher Ring mit *genau einem* maximalen Ideal)
R' sei die ganz-abgeschlossene Hülle von R in seinem totalen Quotientenring Quot (R)
R' sei ein NOETHER'scher R-Modul.
$u \in R$ sei ein universeller Nenner für R'
(d.h. u Nichtnullteiler mit $u \cdot R' \subseteq R$)

Es gelte:
(*) $u \cdot R$ besitzt nur isolierte Primärkomponenten
d.h. ist $u \cdot R = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$ die Primärkomponentenzerlegung von $u \cdot R$,
dann gilt für die $p_i := \sqrt{q_i}$:
$p_j \nsubseteq p_i \quad \forall\, j \neq i.$
(**) Die Quotientenringe R_{p_i} sind in ihren $\mathrm{Quot}(R_{p_i})$ ganz-abgeschlossen

Beh.: R ist ganz-abgeschlossen in Quot (R)
(d.h. R' = R)

Beweis:
(0) Hilfssatz
Vor.: Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement.
M sei ein multiplikatives System in R, das die 0 nicht enthält.
$\overline{}: R \to R_M$ sei der kanonische Homomorphismus.

Beh.: $\overline{}$ ist fortsetzbar zu einem Homomorphismus $\overline{}$: Quot (R) → Quot (R_M).

Beweis:
Hier ist nur zu überlegen, daß das Bild eines Nichtnullteilers aus R unter $\overline{}$ ein Nichtnullteiler in R_M ist.
[Dann liefert nämlich die
Festsetzung $\overline{\left(\frac{r}{s}\right)} := \frac{\overline{r}}{\overline{s}} \in \mathrm{Quot}\,(R_M) \qquad \forall\, \frac{r}{s} \in \mathrm{Quot}\,(R)$
die gewünschte Fortsetzung des kanonischen Homomorphismus]

Sei $x \in R$.
$\overline{x}$ Nullteiler in R_M
$\iff \overline{x} \cdot \frac{\overline{y}}{\overline{m}} = \overline{0}$ für ein $y \in R$, $m \in M$ mit $\frac{\overline{y}}{\overline{m}} \neq 0$
$\iff \overline{xy} = \overline{0}$ für ein $y \in R$ mit $\overline{y} \neq 0$
$\iff xy \in \overline{}^{-1}(0) \underset{\text{Def.}}{=} \{r \in R \mid rm = 0 \text{ für ein } m \in M\}$

für ein
$y \notin \overline{}^{-1}(0) = \{r \in R \mid rm = 0 \text{ für ein } m \in M\}$

$\Longleftrightarrow$ $xym_o = 0$ für ein $m_o \in M$
für ein
$y \in R$ mit $ym \neq 0 \quad \forall\, m \in M$

$\Rightarrow$ $xz = 0$ für ein $z \in R \setminus \{0\}$
$z := ym_o$

$\Longleftrightarrow$ x Nullteiler in R

Also gilt: x Nichtnullteiler in R $\Rightarrow$ $\bar{x}$ Nichtnullteiler in R_M.

Sei nun $r' \in R'$ vorgegeben.

(1) (Beh.): $r' \in R \iff (\overline{r'}^{p_i} \in R_{p_i} \quad \forall\, i = 1,\dots,n)$

dabei ist $\overline{}^{p_i}$: Quot (R) $\to$ Quot (R_{p_i}) die (nach (0) mögliche) Erweiterung des natürlichen Homomorphismus $\overline{}^{p_i}$: $R \to R_{p_i}$.

$r' \in R' \Rightarrow \exists\, r \in R\colon r' = \frac{r}{u}$.

Nun gilt:

$$r' \in R \iff r \in uR = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$$

$$\iff r \in q_i \underset{9.1.2,(1)}{=} q_i^{ec} = \left(\overline{}^{p_i}\right)^{-1}(q_i^e) \quad (^e \text{ und } {}^c \text{ bzgl. } p_i!) \quad \forall\, i = 1,\dots,n$$

$$\iff \bar{r}^{p_i} \in q_i^e \underset{(*)}{=} \bigcap_{q_j \subseteq p_i} q_j^e \quad (^e \text{ bzgl. } p_i)$$

$$\underset{9.2.3.}{=} (uR)^e \quad (^e \text{ bzgl. } p_i)$$

$$= \bar{u}^{p_i} \cdot R_{p_i} \quad \forall\, i = 1,..,n$$

$$\iff \overline{r'}^{p_i} = \frac{\bar{r}^{p_i}}{\bar{u}^{p_i}} \in R_{p_i} \quad \forall\, i = 1,\dots,n$$

(2) (Beh.): $\overline{r'}^{p_i} \in R_{p_i} \quad \forall\, i = 1,\dots,n$

$r' \in R' \Rightarrow \bar{r}'^{p_i}$ ganz-algebraisch über $\bar{R}^{p_i}$ $(\subseteq R_{p_i}) \quad \forall\, i = 1,\dots,n$

$$\underset{(**)}{\Rightarrow} \overline{r'}^{p_i} \in R_{p_i} \quad \forall\, i = 1,\dots,n$$

9.3. DEDEKIND - Ringe

Auch dieser Abschnitt ist im wesentlichen eine Zusammenstellung technischer Hilfsmittel für spätere Sätze.

9.3.1. Definition

Ein Integritätsbereich R heißt "DEDEKIND-Ring", wenn folgende drei Axiome erfüllt sind:

(i) R ist NOETHER'sch

(ii) Jedes echte Primideal von R ist maximal
(dabei heißt ein Ideal $\mathfrak{a}$ in R "echt", falls $(0) \neq \mathfrak{a} \neq R$)

(iii) R ist ganz-abgeschlossen in seinem Quotientenkörper

9.3.2. Satz

Vor.: Sei R ein Integritätsbereich, der (i) und (iii) erfüllt.

$\mathfrak{p}$ sei ein minimales Primideal in R
(d.h. $\nexists$ $\mathfrak{a}$ echtes Primideal in R mit: $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{p}$)

$R' := R_{\mathfrak{p}} = \frac{R}{R\setminus\mathfrak{p}}$

Beh.: R' ist ein DEDEKIND-Ring mit $\mathfrak{p}^e = R'\mathfrak{p}$ als einzigen (maximalen) Primideal.

Beweis:
Nach 9.2.1. und 9.2.2. erfüllt R' die Axiome (i) und (iii).
Nach 9.2.4,(2) und (4) ist $R'\mathfrak{p}$ das einzige (maximale) Primideal in R', also gilt (ii).

9.3.3. Definition

Die hier eingeführten Begriffe sind rein technischer Natur.
Sei R ein Integritätsbereich.
Ein R-Untermodul $\mathfrak{a}$ von Quot (R) heißt "gebrochenes Ideal" von R, wenn $\mathfrak{a}$ eine endliche Basis über R besitzt.
Die gewöhnlichen Ideale in R werden zur Unterscheidung gelegentlich auch "ganze Ideale" genannt.
Ein gebrochenes Ideal $\mathfrak{a}$ von R heißt "invertierbar", wenn ein gebrochenes Ideal $\mathfrak{b}$ von R existiert mit $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = R$.

9.3.4. Bemerkungen

a) In einem NOETHER'schen Integritätsbereich R sind die ganzen Ideale auch gebrochene Ideale.

Ein R-Modul $\mathfrak{a}$ ist in diesem Fall offenbar genau dann ein gebrochenes Ideal, wenn ein "universeller Nenner" $d \in R \setminus \{0\}$ existiert mit $\mathfrak{a} \subseteq \frac{R}{d}$.
(d.h. die Elemente von $\mathfrak{a}$ haben in R einen universellen Nenner d)
Es gilt dann $\mathfrak{a} = \frac{d \cdot \mathfrak{a}}{d}$, wobei $d \cdot \mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal in R ist.

b) Ist $\mathfrak{a}$ invertierbar, so ist $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = R$ eindeutig gegeben durch

$$R:\mathfrak{a} := \{x \in \mathrm{Quot}\,(R) \mid x\mathfrak{a} \subseteq R\}$$

Es gilt sogar: $\mathfrak{a}$ invertierbar $\iff \mathfrak{a} \cdot (R:\mathfrak{a}) = R$.

Das eindeutige "Inverse" $\mathfrak{b}$ wird mit $\mathfrak{a}^{-1}$ bezeichnet: $\mathfrak{a}^{-1} = R:\mathfrak{a}$, falls $\mathfrak{a}$ invertierbar.

⌈(1) (Beh.): Ist $\mathfrak{b}$ ein R-Untermodul von Quot(R) mit $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = R$, dann ist $\mathfrak{b} = R:\mathfrak{a}$.

"$\subseteq$" $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = R \Rightarrow \mathfrak{b} \subseteq R:\mathfrak{a}$

"$\supseteq$" $R:\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cdot \underbrace{\mathfrak{a} \cdot (R:\mathfrak{a})}_{\subseteq R} \subseteq \mathfrak{b} \cdot R = \mathfrak{b}$

(2) (Beh.): *Jeder* R-Untermodul $\mathfrak{b}$ von Quot (R) mit $R \subseteq \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ (insbesondere $\mathfrak{b} = R:\mathfrak{a}$) besitzt bereits eine endliche Basis über R, d.h. ist ein gebrochenes Ideal.

$R \subseteq \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$

$\Rightarrow 1 = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ mit passend gewählten $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{a}$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathfrak{b}$

$\Rightarrow b = b \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{b a_i}_{\in R} b_i \in \sum_{i=1}^{n} R b_i \quad \forall\, b \in \mathfrak{b}$

$\Rightarrow \mathfrak{b} \subseteq \sum_{i=1}^{n} R b_i \quad (\subseteq \mathfrak{b})$

$\Rightarrow \mathfrak{b} = \sum_{i=1}^{n} R b_i$
⌊

c) Wir werden im folgenden nur $\mathfrak{a}^{-1}$ bzw. allgemein $R:\mathfrak{a}$ als gebrochene Ideale auffassen.

Alle sonst auftretenden Ideale sollen ganz sein.
DEDEKIND'sche Ringe lassen sich charakterisieren als Integritätsbereiche, in denen jedes Ideal als Produkt von Primidealen darstellbar ist. Wir werden hier zeigen, daß sich jedes Ideal in einem DEDEKIND-Ring jedenfalls als Produkt von Primidealen schreiben läßt. (Die Umkehrung benötigen wir nicht.)

• 9.3.5. Lemma

Vor.: Sei R ein Ring, p ein Primideal in R

Beh.: Für beliebige Ideale a,b in R gilt: $a \cdot b \subseteq p \Rightarrow a \subseteq p \vee b \subseteq p$

Beweis:

A: $a \nsubseteq p \wedge b \nsubseteq p$

$\Rightarrow \exists\, a \in a,\ b \in b : a \notin p \wedge b \notin p \wedge a \cdot b \in p$ ⨳ (p prim)

• 9.3.6. Lemma

Vor.: Sei R ein NOETHER'scher Integritätsbereich
a sei ein Ideal in R

Beh.: Es existieren Primideale p_i mit $a \subseteq p_i$ $(i = 1,\ldots,r)$, so daß gilt:

$$p_1 \cdot \ldots \cdot p_r \subseteq a$$

Beweis:

1. Fall: a prim . klar.

2. Fall: a nicht prim

(1) (Beh.): $\exists\, b,c$ Ideale in R : $a \subsetneq b$, $a \subsetneq c$, $b \cdot c \subseteq a$

a nicht prim

$\Rightarrow \exists\, b,c \notin a : b \cdot c \in a$

$\Rightarrow \exists\, b,c \notin a : bR \cdot cR \subseteq a$

$b := bR + a$, $c := cR + a$

$\Rightarrow a \subsetneq b$, $a \subsetneq c$ und

$$bc = (bR + a) \cdot (cR + a) = \underbrace{bR \cdot cR}_{\subseteq a} + \underbrace{bR \cdot a}_{\subseteq a} + \underbrace{a \cdot cR}_{\subseteq a} + \underbrace{a^2}_{\subseteq a} \subseteq a$$

(2) A: Der Satz ist für a falsch

$\Rightarrow$ Der Satz ist für b oder c falsch

[Sonst gälte:

$p_1 \cdot \ldots \cdot p_s \subseteq b$

$p_{s+1} \cdot \ldots \cdot p_r \subseteq c$]

$\Rightarrow p_1 \cdot \ldots \cdot p_r \subseteq b \cdot c \subseteq a$ ⨳ (A)

Sei o.B.d.A. der Satz für b falsch.
Nun findet man mit demselben Argument wie für a einen echten Teiler b_1 von b, so daß der Satz für b_1 falsch wird.
So fortfahrend erhält man schließlich eine unendliche Kette von Idealen

$$a \subsetneq b \subsetneq b_1 \subsetneq b_2 \subsetneq \cdots$$

Dies ist ein Widerspruch (⨳) zum Teilerkettensatz in NOETHER'schen Ringen.

• 9.3.7. Lemma

Vor.: Sei R ein NOETHER'scher Integritätsbereich.
Jedes echte Primideal in R sei maximal.
p sei ein echtes Primideal in R

Beh.: $R:p \nsubseteq R$

Beweis:

Es ist zu zeigen:

$$\exists \frac{b}{c} \in R:p \quad \text{mit} \quad b \notin cR.$$

Sei $c \in p\setminus\{0\}$ beliebig gewählt.

Nach 9.3.6. existieren Primideale p_i in R $(i = 1,\ldots,r)$, so daß gilt:

$p_1\cdot\ldots\cdot p_r \subseteq cR$.

Das Produkt $p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_r$ sei o.B.d.A. unverkürzbar, d.h. z.B. $p_2\cdot\ldots\cdot p_r \nsubseteq cR$.

Es gilt $p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_r \subseteq cR \subseteq p$

$\Rightarrow$ $p_{i_o} \subseteq p$ für ein i_o

(o.B.d.A. $i_o = 1$)

p_1 prim, also maximal

$\Rightarrow$ $p_1 = p$

Also gilt: $pp_2\cdot\ldots\cdot p_r \subseteq cR$

$p_2\cdot\ldots\cdot p_r \nsubseteq cR$

$\Rightarrow$ $\exists\, b \notin cR,\ b \in p_2\cdot\ldots\cdot p_r$

und $pb \subseteq pp_2\cdot\ldots\cdot p_r \subseteq cR$

$\Rightarrow$ $b \notin cR,\ p\frac{b}{c} \subseteq R$

$\Rightarrow$ $b \notin cR,\ \frac{b}{c} \in R:p$

• 9.3.8. Lemma

Vor.: R DEDEKIND-Ring
p echtes Primideal in R

Beh.: p ist invertierbar
(d.h. $p\cdot(R:p) = R$)

Beweis:

(1) (Beh.): $(R:p)\cdot p = p \ \vee\ (R:p)\cdot p = R$

$R \subseteq R:p$

$\Rightarrow$ $p = R\cdot p \subseteq (R:p)\cdot p \subseteq R$

p prim, also maximal

$\Rightarrow\ (R:\mathfrak{p})\cdot\mathfrak{p} = \mathfrak{p} \quad \vee \quad (R:\mathfrak{p})\cdot\mathfrak{p} = R$

(2) A: $(R:\mathfrak{p})\cdot\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$

$\Rightarrow\ (R:\mathfrak{p})^2\cdot\mathfrak{p} = (R:\mathfrak{p})\cdot(R:\mathfrak{p})\cdot\mathfrak{p} = (R:\mathfrak{p})\cdot\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$

$\vdots$

$\Rightarrow\ (R:\mathfrak{p})^n\cdot\mathfrak{p} = \mathfrak{p} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

Sei $b \in R:\mathfrak{p}$, $a \in \mathfrak{p}\setminus\{0\}$

$\Rightarrow\ b^n a \in (R:\mathfrak{p})^n\mathfrak{p} = \mathfrak{p} \subseteq R \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow\ b^n \in \frac{R}{a} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow$ b ganz über R

[Sei etwa $b^n = \frac{r_n}{a}$ mit $r_n \in R \quad (n \in \mathbb{N}_0)$

Das Ideal $(r_0, r_1, \ldots)$ hat ein endliches Erzeugendensystem, ist also etwa gleich $\sum_{n=0}^{m-1} r_n R$ (mit einem $m \in \mathbb{N}$).

$\Rightarrow\ r_m = \sum_{n=0}^{m-1} (-\alpha_n) r_n \quad$ mit $\alpha_n \in R$

$\Rightarrow\ \cancel{a}\cdot b^m = \sum_{n=0}^{m-1} (-\alpha_n) b^n \cancel{a}$

$\Rightarrow\ \sum_{n=0}^{m} \alpha_n b^n = 0$ mit $\alpha_m = 1$

]

$\Rightarrow\ b \in R$ (da R ganz-abgeschlossen in Quot (R))

Mithin, da $b \in R:\mathfrak{p}$ beliebig war: $R:\mathfrak{p} \subseteq R$ XX (9.3.7.)

• 9.3.9. Lemma

- Zerlegungssatz -

Vor.: R DEDEKIND-Ring

$\mathfrak{a}$ Ideal in R

Beh.: Es existieren Primideale $\mathfrak{p}_i$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$ $(i = 1,\ldots,r)$, so daß gilt:

$\mathfrak{p}_1\cdot\ldots\cdot\mathfrak{p}_r = \mathfrak{a}$

Beweis:

(0) Sei o.B.d.A. $\mathfrak{a} \neq (0)$.

Nach 9.3.6. existieren Primideale $\mathfrak{p}_i$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$ $(i = 1,\ldots,r)$ und $\mathfrak{p}_1\cdot\ldots\cdot\mathfrak{p}_r \subseteq \mathfrak{a}$

Sei r minimal, so daß also kein kürzeres Primidealprodukt in $\mathfrak{a}$ liegt.

(1) (Beh.): Für alle echten Primideale p in R mit $a \subseteq p$ gilt:

$p^{-1}a$ ganzes Ideal in R mit (o.B.d.A.) $p_2 \cdot \ldots \cdot p_r \subseteq p^{-1}a$

(Man beachte, daß nach 9.3.8. p invertierbar ist, also p^{-1} existiert!)

$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r \subseteq a \subseteq p$

$\Rightarrow p_{i_0} \subseteq p$ für ein i_0

9.3.5. (o.B.d.A. $i_0 = 1$)

p_1 prim, also maximal

$\Rightarrow p_1 = p$

$\Rightarrow p_2 \cdot \ldots \cdot p_r \underset{9.3.8.}{=} p^{-1} p_1 \ldots p_r \subseteq p^{-1}a$

$a \subseteq p \Rightarrow p^{-1}a \underset{9.3.4,b)}{=} \{x \in \text{Quot}\, R \mid xp \subseteq R\} \cdot a = \{xa \mid x \in \text{Quot}\, R, a \in a, xp \subseteq R\} \underset{a \subseteq p}{\subseteq} R$

$\Rightarrow p^{-1}a$ ist ein ganzes Ideal in R mit $p_2 \cdot \ldots \cdot p_r \subset p^{-1}a$

(2) Wir beweisen das Lemma durch vollständige Induktion nach r.

1. Schritt: r = 1

$p_1 \subseteq a$

p_1 prim, also maximal $\quad \Big\} \; p_1 = a$

2. Schritt: Schluß von 1,...,r-1 auf r

Induktionsvor.: Liegt in einem Ideal ein Primidealprodukt mit weniger als r Faktoren, dann ist es als Produkt gewisser Primideale schreibbar.

Induktionsbeweis:

Nach (1) ist $p_2 \cdot \ldots \cdot p_r \subseteq p^{-1}a$

$\Rightarrow p^{-1}a = p_2' \cdot \ldots \cdot p_s'$

$\Rightarrow a = pp^{-1}a = pp_2' \cdot \ldots \cdot p_s'$

• • 9.4. Ein Hauptidealsatz

In diesem Abschnitt beweisen wir den in 4.2. wesentlich benutzten Satz, daß ein DEDEKIND-Ring mit nur endlich vielen Primidealen bereits ein Hauptidealring ist. Dazu verwenden wir die in Abschnitt 9.3. entwickelte klassische Idealtheorie.

• 9.4.1. Satz

- Durchschnittsatz von KRULL -

Vor.: Sei R ein NOETHER'scher Integritätsbereich
$\mathfrak{a}$ sei ein echtes Ideal in R

Beh.: $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n = (0)$

Beweis:

Sei zur Abkürzung $\mathfrak{b} := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n$

(1) (Beh.): $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$

"$\supseteq$" klar

"$\subseteq$" Sei $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \bigcap_{i=1}^{m} \mathfrak{q}_i$ eine Primärkomponentenzerlegung von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{p}_i := \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ $\forall\, i = 1,\dots,m$.

Wir haben zu zeigen: $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{q}_i \quad \forall\, i = 1,\dots,m$.

Sei also $i \in \{1,\dots,m\}$ fest gewählt.

1. Fall: $\mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{p}_i$

$$\left.\begin{array}{l} \text{A: } \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{q}_i \\ \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{q}_i \end{array}\right\rangle \quad \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i \quad ⨳$$

2. Fall: $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$

$\Rightarrow \mathfrak{a}^n \subseteq \mathfrak{q}_i$ für ein $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \mathfrak{b} \underset{\text{Def.}}{\subseteq} \mathfrak{a}^n \subseteq \mathfrak{q}_i$

(2) (Beh.): $\exists\, z \in \mathfrak{a} : \ (z-1)\cdot\mathfrak{b} = (0)$

Da R NOETHER'sch ist, ist $\mathfrak{b}$ endlich erzeugt.

Sei etwa $\mathfrak{b} = \sum_{i=1}^{n} Rb_i$.

Wegen (1) gilt dann:

$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j$ für gewisse $a_{ij} \in \mathfrak{a}$,

$$\text{d.h.} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (a_{ij}-\delta_{ij})_{ij}\cdot(b_j)_j = (0)$

$\Rightarrow \det\,((a_{ij}-\delta_{ij})_{i,j})\cdot b_k = 0 \quad \forall\, k$

$\Rightarrow \det\,((a_{ij}-\delta_{ij})_{i,j})\cdot\mathfrak{b} = 0$

Entwickeln der Determinante zeigt, daß sie die Form z-1 hat mit $z \in \mathfrak{a}$.

(3) Da kein Element von $\mathfrak{a}-1$ Nullteiler in R ist, folgt die Behauptung aus (2):

$$\underbrace{(z-1)}_{\in\,\mathfrak{a}-1}\cdot b = (0) \Rightarrow b = (0)$$

• 9.4.2. Korollar

Vor.: R NOETHER'scher Integritätsbereich
$\mathfrak{a}$ echtes Ideal in R

Beh.: $\mathfrak{a}^2 \subsetneq \mathfrak{a}$

Beweis:
$\mathfrak{a}^2 \subseteq \mathfrak{a}$ ist klar.

A: $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$

$$\Rightarrow \mathfrak{a}^3 = \mathfrak{a}^2\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$$

$\vdots$

$$\Rightarrow \mathfrak{a}^n = \mathfrak{a} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n = \mathfrak{a} \quad ⨳ \quad (9.4.1.)$$

• 9.4.3. Lemma

Vor.: Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement
$\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_n$ seien paarweise teilerfremde Ideale in R $(n > 1)$.
(d.h. $\mathfrak{a}_i \neq R \;\; \forall\, i$ und $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = R \;\; \forall\, i \neq j$)
$b_1,\dots,b_n \in R$

Beh.: $\exists\, b \in R$: $b \equiv b_i (\operatorname{mod} \mathfrak{a}_i) \quad \forall\, i = 1,\dots,n$

Beweis:
(1) (Beh.): $\mathfrak{a}_n$ und $\mathfrak{a}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{a}_{n-1}$ sind teilerfremd

$$R = R^{n-1} = \prod_{i=1}^{n-1} \underbrace{(\mathfrak{a}_n+\mathfrak{a}_i)}_{R\,=} \subseteq \mathfrak{a}_n + \prod_{i=1}^{n-1} \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{a}_n + \bigcap_{i=1}^{n-1} \mathfrak{a}_i \subseteq R$$

(z.B. für n = 3:

$$(\mathfrak{a}_n+\mathfrak{a}_2)(\mathfrak{a}_n+\mathfrak{a}_1) = \mathfrak{a}_n\mathfrak{a}_n + \mathfrak{a}_n\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_n + \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_n + \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1\;)$$

$$\Rightarrow \mathfrak{a}_n + \mathfrak{a}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{a}_{n-1} = R.$$

(2) Beweis des Lemmas durch vollständige Induktion nach n:

1. Schritt: n = 2

$\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ teilerfremd

$\Rightarrow \; R = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$

$\Rightarrow \; 1 = a_1 + a_2$ mit $a_1 \in \mathfrak{a}_1, \; a_2 \in \mathfrak{a}_2$

Nun gilt für $b := b_1a_2 + b_2a_1$:

$$b = b_1\underbrace{(1-a_1)}_{a_2 =} + b_2a_1 = b_1 + (b_2-b_1)\underbrace{a_1}_{\in \mathfrak{a}_1} \in b_1 + \mathfrak{a}_1 \Rightarrow b \equiv b_1 \pmod{\mathfrak{a}_1}$$

$$b = b_1a_2 + b_2\underbrace{(1-a_2)}_{a_1 =} = b_2 + (b_1-b_2)\underbrace{a_2}_{\in \mathfrak{a}_2} \in b_2 + \mathfrak{a}_2 \Rightarrow b \equiv b_2 \pmod{\mathfrak{a}_2}$$

2. Schritt: Schluß von n-1 auf n.

$\exists\, b' : \; b' \equiv b_i \pmod{a_i} \quad \forall\, i = 1,\dots,n-1$

(1) liefert mit dem 1. Schritt :

$$\exists\, b \in R: b \equiv b' \pmod{\underbrace{\mathfrak{a}_1\cap\dots\cap\mathfrak{a}_{n-1}}_{\subseteq \mathfrak{a}_i \;\forall\, i = 1,\dots,n-1}} \text{ und } b \equiv b_n \pmod{\mathfrak{a}_n}$$

$\Rightarrow \; b \equiv b_i \pmod{\mathfrak{a}_i} \quad \forall\, i = 1,\dots,n-1$ und $b \equiv b_n \pmod{\mathfrak{a}_n}$

• 9.4.4. Satz

Vor.: Sei R ein DEDEKIND-Ring

Die Menge der echten Primideale von R sei endlich, etwa $\{\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n\}$.

Beh.: R ist ein Hauptidealring

Beweis:

(1) (Beh.): Es genügt zu zeigen: $\exists\, p_i \in \mathfrak{p}_i: p_i \notin \mathfrak{p}_i^2 \wedge p_i \notin \mathfrak{p}_j \;\forall\, j \neq i \; (i = 1,\dots,n)$

Da R DEDEKIND-Ring ist, also nach 9.3.9. jedes Ideal Produkt der $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n$ ist, genügt es zu zeigen, daß jedes $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1,\dots,n)$ Hauptideal ist.

Es genügt nun sogar zu zeigen: $\exists\, p_i \in \mathfrak{p}_i: p_i \notin \mathfrak{p}_i^2 \wedge p_i \notin \mathfrak{p}_j \;\forall\, j \neq i$, denn dann gilt $\mathfrak{p}_i = Rp_i$

[Faktorisiert man Rp_i in Primideale $Rp_i = \prod_{j=1}^{n} \mathfrak{p}_j^{n_j}$, dann gilt:

A: $\exists\, k \neq i: n_k \neq 0$

$\Rightarrow \; p_i \in Rp_i = \prod_{j=1}^{n} \mathfrak{p}_j^{n_j} \subseteq \mathfrak{p}_k \quad \times\times$

A: $n_i \neq 0,1$

$$\Rightarrow \quad p_i \in Rp_i = \prod_{j=1}^{n} p_j^{n_j} \subseteq p_i^{n_i} \subseteq p_i^2 \quad \text{XX}$$

Also: $n_k = 0 \quad \forall\, k \neq i$ und $n_i = 1$, d.h. $Rp_i = p_i$

(2) R ist als DEDEKIND-Ring NOETHER'sch

$\Rightarrow \quad p_i^2 \subsetneq p_i$

9.4.2.

$\Rightarrow \quad \exists\, r_i \in p_i : r_i \notin p_i^2$

p_j prim, also maximal $\Rightarrow$ $p_i^2, p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_n$ paarweise teilerfremd

$\Rightarrow \quad \exists\, p_i \in p_i : p_i \notin p_i^2 \;\wedge\; p_i \notin p_j \quad \forall\, j \neq i$

9.4.3.

[denn: $\exists\, p_i \in R$: $p_i \equiv 0 \pmod{p_i}$

$p_i \equiv r_i \pmod{p_i^2}$

$p_i \equiv 1 \pmod{p_j} \quad \forall\, j \neq i$

• 9.5. Ein Satz über Primärkomponenten von Hauptidealen

In diesem Abschnitt beweisen wir die in 5.4. wesentlich benutzte algebraische Charakterisierung der Primärkomponenten des vom universellen Nenner erzeugten Hauptideals. Auch hierzu benötigen wir die in Abschnitt 9.3. entwickelte klassische Idealtheorie *und* Satz 9.4.4.

• 9.5.1. Lemma

Vor.: Sei R ein NOETHER'scher Ring.

a, b Ideale in R mit $a \neq R$.

$a = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$ sei die Primärkomponentenzerlegung von a, $p_i := \sqrt{q_i} \quad \forall\, i$.

Beh.: $a = a{:}b \iff b \nsubseteq p_i \quad \forall\, i = 1,\ldots,n$

Beweis:

"$\Rightarrow$" A: $b \subseteq p_i$ für ein i (o.B.d.A. i = 1)

$\Rightarrow \quad b^\rho \subseteq q_1$ für ein ρ

$\Rightarrow \quad b^\rho \cdot (q_2 \cap \ldots \cap q_n) \subseteq q_1 \cap \ldots \cap q_n = a$

$\Rightarrow \quad b^{\rho-1} \cdot (q_2 \cap \ldots \cap q_n) \subseteq a{:}b \underset{\text{Vor.}}{=} a$

$\vdots$

$\Rightarrow \quad q_2 \cap \ldots \cap q_n \subseteq a$ XX (Unverkürzbarkeit der Zerlegung $a = q_1 \cap \ldots \cap q_n$)

"$\Leftarrow$" Sei $b \nsubseteq p_i \quad \forall\, i = 1,\dots,n$

$\Rightarrow \; q_i : b \underset{\text{Def.}}{=} \{r \in R \mid rb \subseteq q_i\} = q_i$

["$\supseteq$" klar

"$\subseteq$" A: $\exists\, r \in R : rb \subseteq q_i \;\wedge\; r \notin q_i$

$\Rightarrow \; b^\rho \in q_i \quad \forall\, b \in b$ für ein ρ

$\Rightarrow \; b \subseteq p_i$ ※

$\Rightarrow \; a : b = (q_1 \cap \dots \cap q_n) : b$

$= (q_1 : b) \cap \dots \cap (q_n : b)$

$= q_1 \cap \dots \cap q_n$

$= a$

• 9.5.2. Lemma

- 1. Hauptidealsatz von KRULL -

Vor.: Sei R ein NOETHER'scher Integritätsbereich.

R sei ganz-abgeschlossen in seinem Quotientenkörper Quot (R).

$a \in R \setminus \{0\}$ sei eine Nichteinheit

(Ra also ein Hauptideal in R mit $(0) \neq Ra \neq R$).

p sei ein zur Primärkomponentenzerlegung von Ra gehöriges Primideal.

Beh.: p ist in R ein minimales Primideal.

Insbesondere besitzt Ra nur isolierte Primärkomponenten.

Beweis:

(1) (Beh.): Man kann o.B.d.A. p als *maximal* voraussetzen.

Ansonsten gehe man nämlich in $R' := \frac{R}{R \setminus p}$ und betrachte $p' := R'p$:

(1.1) R', R'a und p' erfüllen dieselben Voraussetzungen wie R, Ra und p:

Nach 9.2.1. ist R' NOETHER'sch.

Nach 9.2.2. ist R' ganz-abgeschlossen in Quot (R').

$a \in R' \setminus \{0\}$ ist eine Nichteinheit (denn $a \in Ra \subseteq p = R \setminus (R \setminus p)$).

Nach 9.2.3. ist p' ein zur Primärkomponentenzerlegung von R'a gehöriges Primideal.

(1.2) Nach 9.2.4,(4) ist p' maximal in R'.

(1.3) (Beh.): p minimal in R $\iff$ p' minimal in R'

Denn nach 9.2.4,(2) besteht eine bijektive Zuordnung zwischen den Primidealen in R' und denjenigen Primidealen in R, die in p enthalten sind.

(2) (Beh.): p invertierbar

(2.1) (Beh.): $(R:p)\cdot p = p \ \vee \ (R:p)\cdot p = R$

Das zeigt man mit (1) wie in 9.3.8, Beweisteil (1)

(2.2) (Beh.): $R:p \nsubseteq R$

Da p Primideal zu Ra ist, gilt $Ra \subseteq p$

$\Rightarrow \ Ra : p \neq Ra$

9.5.1.

$\Rightarrow \ \exists \ x \in (Ra:p)\backslash Ra$

$\Rightarrow \ (\frac{x}{a})p \subseteq R \ \wedge \ \frac{x}{a} \notin R$

$\Rightarrow \ R:p \nsubseteq R$

(2.3) A: p nicht invertierbar.

Dann gilt nach (2.1) $(R:p)\cdot p = p$.

Daraus folgert man wie in 9.3.8, Beweisteil (2), daß dann $R:p \subseteq R$ ⨳ (2.2)

(3) (Beh.): Jedes Ideal $q \neq (0)$, $q \subseteq p$ hat als ein zur Primärkomponentenzerlegung gehöriges Primideal das Ideal p.

$q\cdot(R:p)\cdot p \subseteq (q:p)\cdot p \subseteq q \ \Rightarrow \ q\cdot(R:p) \subseteq q:p$

$p\cdot\underbrace{(R:p)}_{\substack{= p^{-1} \\ (2)}} = R \ \Rightarrow \ q:p = \underbrace{(q:p)\cdot p}_{\subseteq q}\cdot(R:p) \subseteq q\cdot(R:p)$

$\Rightarrow \ q:p = q\cdot(R:p) = q\cdot p^{-1}$

$q\cdot p^{-1} \neq q$

⌈A: $q\cdot p^{-1} = q$

$\Rightarrow \ q = q\cdot p$

$\Rightarrow \ \exists \ z \in p\colon (z-1)q = (0)$

9.4.1, Beweisteil (2)

$p \neq R \ \Rightarrow \ 1 \notin p$

R Integritätsbereich

⌊$\Rightarrow \ q = (0)$ ⨳

$\Rightarrow q:p \neq q$

$\Rightarrow \exists \ p_1$ zur Primärkomponentenzerlegung von q gehöriges Primideal mit $p \subseteq p_1$

9.5.1.

Nach (1) ist p maximal

$\Rightarrow\ p_1 = p$

(4) Nun folgt leicht die Behauptung des Lemmas:

A: $\exists\ p_1 \subsetneqq p$, p_1 echtes Primideal

$\underset{(3)}{\Rightarrow}$ p_1 hat p als zur Primärkomponentenzerlegung gehöriges Primideal

Die Primärkomponentenzerlegung von p_1 (prim!) ist $p_1 = p_1$

$\Rightarrow\ p_1 = p$ XX

Daraus folgt auch sofort die Zusatzbehauptung, da minimale Ideale nach Definition *nicht* eingebettet sein können.

- 9.5.3. Lemma

Vor.: Sei R ein NOETHER'scher Integritätsbereich

R sei ganz-abgeschlossen in seinem Quotientenkörper Quot (R)

p sei ein minimales Primideal in R

$$R' := R_p = \frac{R}{R\setminus p}$$

Beh.: Die zu p gehörigen Primärideale sind gerade die Ideale

$$p^{(n)} := (pR')^n \cap R \quad \text{für die } n \in \mathbb{N}$$

($p^{(n)}$ heißt die "n-te symbolische Potenz" von p)

Beweis:

In 9.2.4,(3) haben wir gesehen, daß die Zuordnung

$$\{q \mid q \text{ Primärideal in R zu } p\} \ni q \longmapsto q\cdot R' \in \{q' \mid q' \text{ Primärideal in } R' \text{ zu } pR'\}$$

bijektiv ist, wobei $q = (q\cdot R') \cap R \ \ \forall\, q$.

Daher genügt es zu zeigen:

Für alle echten Ideale a' in R' gilt

$a' = (pR')^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, und

a' ist primär zu pR'.

Sei also a' ein echtes Ideal in R'.

Nach 9.3.2. ist R' ein DEDEKIND-Ring mit pR' als einzigen (maximalen) Primideal.

Dann ist

einerseits nach 9.3.9. $a' = (pR')^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und

andererseits pR' das *einzige* zu a' gehörige Primideal und

somit a' Primärideal zu pR'.

• 9.5.4. Satz

Vor.: Sei R ein NOETHER'scher Integritätsbereich.
R sei ganz-abgeschlossen in seinem Quotientenkörper Quot (R).
$a \in R\setminus\{0\}$ sei eine Nichteinheit.

Beh.: Die Primärkomponentenzerlegung von aR hat die Form

$$aR = \bigcap_{j=1}^{r} p_j^{(n_j)} \quad \text{, wobei}$$

$$p_j = (t_j \tfrac{R}{R\setminus p_j}) \cap R \quad \text{minimale Primideale sind}$$

($t_j \in p_j$ ist durch diese Gleichung charakterisiert)

mit den zugehörigen Primäridealen

$$p_j^{(m)} = (t_j^m \tfrac{R}{R\setminus p_j}) \cap R \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Beweis:

Wegen 9.5.2. und 9.5.3. genügt es zu zeigen:

Für jedes minimale Primideal p in R gilt

$$p^{(m)} = (t^m \tfrac{R}{R\setminus p}) \cap R \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$$

für ein $t \in p$, das charakterisiert ist durch $p = (t \frac{R}{R\setminus p}) \cap R$.

Sei also p ein minimales Primideal in R; $R' := \frac{R}{R\setminus p}$.

$$p^{(m)} \underset{\text{Def.}}{=} (pR')^m \cap R.$$

Nach 9.3.2. ist R' ein DEDEKIND-Ring mit nur *einem* Primideal.

Dann ist nach 9.4.4. R' ein Hauptidealring, also pR' ein Hauptideal:

$$pR' = \mathrm{p}R' \quad \text{mit } \mathrm{p} \in R'.$$

Setzt man $\mathrm{p} =: \frac{t}{p_1}$ mit $t \in R$, $p_1 \in R\setminus p$, dann ist

$$\mathrm{p}R' = t\,\frac{R'}{p_1} \underset{\nwarrow}{=} t\,R'$$

$R' = p_1R'$, da $p_1 \in R\setminus p$, also Einheit in R'.

Zusammen:

$$pR' = t\,R' \quad \text{für ein } t \in R$$

und daher

$$(pR')^m = t^mR'$$

$$p^{(m)} = (pR')^m \cap R = (t^mR') \cap R$$

Schließlich gilt noch: $t \in (tR') \cap R = p^{(1)} \underset{\nwarrow\, 9.2.4,(2)}{=} (pR') \cap R = p$

Mithin ist $t \in p$ und charakterisiert durch $p = [p^{(1)}=]\ (t \frac{R}{R\setminus p}) \cap R$.

•• 9.6. Einige Charakterisierungen der symbolischen Potenzen minimaler Primideale

Wir haben in 5.10. mit analytischen Methoden symbolische Primidealpotenzen in einem Spezialfall durch Potenzen gebrochener Ideale ausgedrückt.
Hier sei ein algebraischer Beweis dazu gebracht.
Dieser Abschnitt ist eine natürliche Fortsetzung des vorherigen.

• 9.6.1. Lemma

(Verallgemeinerung von 9.5.2.)

Vor.: Sei R ein NOETHER'scher Integritätsbereich
R sei ganz-abgeschlossen in seinem Quotientenkörper Quot (R)
$s \in \text{Quot}(R)\setminus\{0\}$ mit $(sR) \cap R \neq R$
$\mathfrak{p}$ sei ein zur Primärkomponentenzerlegung von $(sR) \cap R$ gehöriges Primideal

Beh.: $\mathfrak{p}$ ist in R ein minimales Primideal

Beweis:

(0) Wir führen den Beweis zurück auf 9.5.2.

Sei $s = \dfrac{s_1}{s_2}$, $s_1, s_2 \in R$.

Dann gilt zunächst mal:

$$(sR) \cap R \neq R \iff R \nsubseteq \frac{s_1}{s_2} R \iff s_2R \nsubseteq s_1R \iff s_2 \notin s_1R$$

Sei die Primärkomponentenzerlegung von s_1R gegeben durch

$$s_1R = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i .$$

Dann sind nach 9.5.2. $\mathfrak{p}_i := \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ minimale Primideale in R

(beachte: s_1 ist keine Einheit, da sonst $s_2 \in s_1R$ ⨳)

Wir werden zeigen,

daß $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$ für ein i

(dann ist $\mathfrak{p}$ insbesondere minimal in R)

(1) (Beh.): $(sR) \cap R = \bigcap_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\mathfrak{q}_i}{s_2} \cap R\right)$

$$(sR) \cap R = \frac{s_1R}{s_2} \cap R$$

$$= \left(\bigcap_{i=1}^{n} \frac{\mathfrak{q}_i}{s_2}\right) \cap R$$

["$\subseteq$" trivial

"$\supseteq$" $r \in \bigcap_{i=1}^{n} \dfrac{\mathfrak{q}_i}{s_2}$

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow r = \frac{q_1}{s_2} = \frac{q_2}{s_2} = \dots = \frac{q_n}{s_2} \quad (q_i \in \mathfrak{q}_i)\\ &\Rightarrow q_1 = q_2 = \dots = q_n \Rightarrow q_1 \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i\end{aligned}\right\rangle$$

R Integritätsbereich

$$\Rightarrow r \in \frac{\bigcap \mathfrak{q}_i}{s_2} = \frac{s_1 R}{s_2}$$

$$= \bigcap_{i=1}^{n} \left(\frac{\mathfrak{q}_i}{s_2} \cap R\right)$$

(2) Es ist nun sogar,

falls $s_2 \notin \mathfrak{q}_i$, $\frac{\mathfrak{q}_i}{s_2} \cap R$ eine Primärkomponente von $(sR) \cap R$ und $\mathfrak{p}_i$ das zugehörige Primideal, bzw.

falls $s_2 \in \mathfrak{q}_i$, $\frac{\mathfrak{q}_i}{s_2} \cap R = R$.

(2.1) (Beh.): $xy \in \frac{\mathfrak{q}_i}{s_2} \cap R$, $y \notin \mathfrak{p}_i \Rightarrow x \in \frac{\mathfrak{q}_i}{s_2} \cap R$

$$\left.\begin{aligned}&xy \in \frac{\mathfrak{q}_i}{s_2} \Rightarrow xys_2 \in \mathfrak{q}_i\\ &y \notin \mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}\end{aligned}\right\rangle xs_2 \in \mathfrak{q}_i \Rightarrow x \in \frac{\mathfrak{q}_i}{s_2}$$

(2.2) (Beh.): $\sqrt{\frac{\mathfrak{q}_i}{s_2} \cap R} = \begin{cases} \mathfrak{p}_i & \text{, falls } s_2 \notin \mathfrak{q}_i \\ R & \text{, falls } s_2 \in \mathfrak{q}_i \end{cases}$

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\mathfrak{q}_i}{s_2} \cap R} &= \{r \in R \mid r^\rho \in \frac{\mathfrak{q}_i}{s_2} \cap R \quad \text{für ein } \rho \in \mathbb{N}\}\\ &= \{r \in R \mid s_2 r^\rho \in \mathfrak{q}_i \quad \text{für ein } \rho \in \mathbb{N}\}\\ &= \begin{cases}\{r \in R \mid r^{\rho_1} \in \mathfrak{q}_i \quad \text{für ein } \rho_1 \in \mathbb{N}\} & \text{, falls } s_2 \notin \mathfrak{q}_i\\ R & \text{, falls } s_2 \in \mathfrak{q}_i\end{cases}\end{aligned}$$

[Es ist nur die erste Beziehung zu zeigen.

"$\supseteq$" trivial

"$\subseteq$" $\left.\begin{aligned}&s_2 r^\rho \in \mathfrak{q}_i \text{ für ein } \rho\\ &s_2 \notin \mathfrak{q}_i\end{aligned}\right\rangle r^{\rho\rho_0} \in \mathfrak{q}_i$ für gewisse ρ und ρ_0

]

$$= \begin{cases} \sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}_i & \text{, falls } s_2 \notin \mathfrak{q}_i \\ R & \text{, falls } s_2 \in \mathfrak{q}_i \end{cases}$$

(2.3) Aus (2.1) und (2.2) folgt nun wie in 9.1.2, Beweisteil (4.3):

$\frac{q_i}{s_2} \cap R$ ist primär und sein Radikal ist p_i (falls $s_2 \notin q_i$) bzw. R (sonst)

(2.4) (Beh.): Ein Primärideal q mit Radikal R ist selbst gleich R.

$$\begin{aligned} \sqrt{q} = R \iff & R \subseteq \{r \in R \mid r^\rho \in q \text{ für ein } \rho\} \\ \iff & \forall\, r \in R : \ r^\rho \in q \quad \text{für ein } \rho \text{ zu } r \\ \Rightarrow & 1 = 1^\rho \in q \qquad (\rho \text{ zu } 1) \\ \Rightarrow & q = R \end{aligned}$$

(3) Nach (1) und (2) hat jetzt die Primärkomponentenzerlegung von $sR \cap R$ die Form

$$sR \cap R = \bigcap_{\substack{i: \\ s_2 \notin q_i}} \left(\frac{q_i}{s_2} \cap R\right) \quad \text{wobei } \sqrt{\frac{q_i}{s_2} \cap R} = p_i \quad \text{, falls } s_2 \notin q_i$$

(Man beachte, daß $\{i \in \{1,\dots,n\} \mid s_2 \notin q_i\} \neq \emptyset$ wegen (0))

Insbesondere ist $p = p_i$ für ein i . q.e.d.

• 9.6.2. Bemerkung

Sei wieder R ein NOETHER'scher Integritätsbereich,
R ganz-abgeschlossen in seinem Quotientenkörper.

(1) Für ein Ideal $(sR) \cap R \neq R$ mit $s \in \text{Quot}(R) \setminus \{0\}$
kann man nun mit Hilfe von 9.5.3. (analog zu 9.5.4.) feststellen:

Die Primärkomponentenzerlegung von $(sR) \cap R$ hat die Form

$$(sR) \cap R = \bigcap_{j=1}^{r} p_j^{(nj)} \quad \text{, wobei}$$

p_j minimale Primideale sind.

Uns interessiert jedoch mehr, daß sich diese Aussage in gewisser Weise auch umkehren läßt:

(2) Sei p ein minimales Primideal in R.

Wir zeigen in 9.6.3./7. ,
daß jede symbolische Potenz $p^{(n)}$ von p die Form hat

$$p^{(n)} = (s_n R) \cap R \quad \text{für ein } s_n \in \text{Quot}(R)$$

Wir wollen uns indessen noch von den (nicht explizit zu konstruierenden) Elementen s_n befreien. Das gelingt uns mit einer der Form nach einfachen und direkten Beschreibung der symbolischen Potenzen durch die Potenzen selbst:

(3) Wir zeigen in 9.6.6.,

daß jedes Ideal $(sR) \cap R$ $(s \in \text{Quot}(R))$ mit $p^n \subseteq (sR) \cap R \neq R$

bereits die Gestalt $(sR) \cap R = p^{(m)}$ hat für ein $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$,

insbesondere gilt dann sogar $p^{(n)} \subseteq (sR) \cap R$.

Zusammen mit der unter (2) zitierten Aussage erhalten wir daraus in 9.6.8.:

$$p^{(n)} = \bigcap_{\substack{s \in \text{Quot}(R) \\ p^n \subseteq (sR) \cap R}} (sR) \cap R$$

$$= \quad R : (R : p^n) \quad ,$$

wobei die letzte Gleichung nur mehr eine triviale algebraische Umformung darstellt.

• <u>9.6.3.</u> Lemma

Vor.: Sei R ein NOETHER'scher Integritätsbereich

R sei ganz-abgeschlossen in seinem Quotientenkörper Quot (R)

p sei ein minimales Primideal in R

Beh.: (i) $p = (sR) \cap R$ für ein $s \in \text{Quot}(R)$

(ii) Man kann ein solches $s = \frac{s_1}{s_2}$ $(s_1, s_2 \in R)$ so wählen, daß

$s_2 \notin p$.

Beweis:

(1) Sei $s_1 \in R \setminus \{0\}$ und

$s_1 R = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$ die Primärkomponentenzerlegung von $s_1 R$; $p_i := \sqrt{q_i}$ $\forall$ i

(Beh.): $(\exists\, s_2 \in R$ mit $p = (\frac{s_1}{s_2} R) \cap R) \iff (p \subseteq p_i$ für ein i)

$p = (\frac{s_1}{s_2} R) \cap R$ für ein $s_2 \in R$

$\iff p \subseteq (\frac{s_1}{s_2} R) \cap R \neq R$ für ein $s_2 \in R$

⌈"$\Leftarrow$" Sei r ein zu $(\frac{s_1}{s_2} R) \cap R$ gehöriges Primideal

Dann ist nach 9.6.1.

r ein minimales Primideal in R,

also wegen $p \subseteq (\frac{s_1}{s_2} R) \cap R \subseteq r$:

$r = p$ und somit

$$p = \left(\frac{s_1}{s_2} R\right) \cap R$$

$$\iff p \subseteq \frac{s_1}{s_2} R \quad \text{für ein } s_2 \in R,\ s_2 \notin s_1 R$$

[Wir hatten uns bereits in 9.6.1, Bew. (0) überlegt, daß

$$\left(\frac{s_1}{s_2} R\right) \cap R \neq R \iff s_2 \notin s_1 R$$

$$\iff \exists\, s_2 \in R \text{ mit : } s_2 \notin s_1 R \text{ und } s_2 p \subseteq s_1 R$$

$$\underset{\text{Def.}}{\iff} s_1 R : p \neq s_1 R$$

$$\underset{9.5.1.}{\iff} p \subseteq p_i \quad \text{für ein } i$$

(2) (Beh.): Die Menge der $s_1 \in R$, zu denen es $s_2 \in R\setminus\{0\}$ gibt

mit $p = \left(\frac{s_1}{s_2} R\right) \cap R$,

ist genau $p\setminus\{0\}$.

(Insbesondere ist damit Behauptung (i) bewiesen.)

Gilt $p = \left(\frac{s_1}{s_2} R\right) \cap R$, dann hat man

$$s_1 = \frac{s_1}{s_2} \cdot s_2 \in \left(\frac{s_1}{s_2} R\right) \cap R = p$$

Man wähle nun umgekehrt $s_1 \in p\setminus\{0\}$ beliebig.

Die Primärkomponentenzerlegung von s_1R sei wieder $s_1R = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$, $p_i := \sqrt{q_i}$ $\forall\, i$.

Dann ist

$$p_1 \cdot \ldots \cdot p_n \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} p_i = \sqrt{s_1 R} \subseteq \sqrt{p} = p$$

$$\underset{9.3.5.}{\Rightarrow} \quad p_i \subseteq p \quad \text{für ein } i$$

p minimales Primideal in R

$$\Rightarrow p = p_i \quad \text{für ein } i$$

$$\underset{(1)}{\Rightarrow} \exists\, s_2 \in R\setminus\{0\} \quad \text{mit } p = \left(\frac{s_1}{s_2} R\right) \cap R.$$

(3) Wir verifizieren nun (ii):

Nach 9.5.4, Bew. kann man $s_1 \in p\setminus\{0\}$ so wählen, daß

$$p = \left(s_1 \frac{R}{R\setminus p}\right) \cap R.$$

Dafür gilt sicher $s_2 \notin p$, falls $p = \left(\frac{s_1}{s_2} R\right) \cap R$:

$$(\frac{s_1}{s_2}R) \cap R \subseteq p$$

$$\Longleftrightarrow \quad R\backslash p \subseteq R\backslash(\frac{s_1}{s_2}R)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall\, r \in R\backslash p : \underbrace{r \notin \frac{s_1}{s_2}R}_{\Longleftrightarrow\ s_2 \notin \frac{s_1}{r}R}$$

$$\Longleftrightarrow \quad s_2 \notin \left(s_1 \frac{R}{R\backslash p}\right) \cap R = p$$

• 9.6.4. Hilfssatz

Vor.: Sei R ein NOETHER'scher Integritätsbereich
p sei ein Primideal in R, $p \neq (0)$
$n \in \mathbb{N}$

Beh.: $p^{(n)}$ ist *die* isolierte Primärkomponente von p^n.
$\sqrt{p^{(n)}} = p$ und
alle anderen Primärkomponenten von p^n sind in p eingebettet.

Beweis:
(0) Sei $R' := \frac{R}{R\backslash p}$.

$$p^{(n)} \underset{\text{Def.}}{=} (pR')^n \cap R$$

$$\underset{\text{triv.}}{=} (\{\tfrac{r}{s} \mid r \in p,\ s \in R\backslash p\})^n \cap R$$

$$\underset{\text{triv.}}{=} \{\tfrac{t}{s} \mid t \in p^n,\ s \in R\backslash p\} \cap R$$

$$\underset{\text{triv.}}{=} (p^n R') \cap R$$

(1) Primärkomponentenzerlegung von p^n:

Für jeden Primteiler $\mathfrak{r}$ von p^n gilt nach 9.3.5.:

$$p^n \subseteq \mathfrak{r} \underset{9.3.5.}{\Rightarrow} p \subseteq \mathfrak{r}$$

Also ist p ein minimaler Primteiler von p^n,
insbesondere ein zu p^n gehöriges Primideal.

[Ist nämlich $p^n = \bigcap_{i=1}^{r} q_i$ die Primärkomponentenzerlegung von p^n, dann ist

$$\prod_{i=1}^{r} \sqrt{q_i} \subseteq \bigcap_{i=1}^{r} \sqrt{q_i} = \sqrt{\bigcap_{i=1}^{r} q_i} = \sqrt{p^n} \subseteq \sqrt{p} = p$$

$\underset{9.3.5.}{\Rightarrow}$ $(p^n \subseteq)\ \sqrt{q_i} \subseteq p$ für ein i

p minimaler Primteiler von p^n

$\Rightarrow$ $p = \sqrt{q_i}$ für ein i.

Also hat die Primärkomponentenzerlegung von p^n die Form

$$p^n = q \cap \bigcap_{i=2}^{r} q_i ,$$

wobei $\sqrt{q} = p \subsetneqq \sqrt{q_i} \quad \forall\ i = 2,\dots,r$

q ist also *die* isolierte Primärkomponente von p^n.

(2) Primärkomponentenzerlegung von $p^n R'$:

Nach 9.2.3. hat nun die Primärkomponentenzerlegung von $p^n R'$ die Form

$$p^n R' = qR'$$

Zusammen mit (0) folgt für $p^{(n)}$:

$$p^{(n)} = (qR') \cap R$$

$$\underset{9.1.2,(1)}{=\!=} \quad q \quad , \text{ \textit{die} isolierte Primärkomponente von } p^n.$$

• 9.6.5. Hilfssatz

Vor.: Sei R ein NOETHER'scher Integritätsbereich

R sei ganz-abgeschlossen in seinem Quotientenkörper Quot (R)

p sei ein minimales Primideal in R , $p \neq (0)$

Beh.: Die Vielfachenkette

$$p \supsetneqq p^{(2)} \supsetneqq p^{(3)} \supsetneqq \cdots$$

ist *echt* absteigend.

Beweis:

Es ist nur zu zeigen, daß $p^{(m)} \neq p^{(m+1)} \quad \forall\ m \in \mathbb{N}$.

Sei zur Abkürzung wieder $R' := \frac{R}{R \setminus p}$.

Nach 9.5.4. Beweis ist

$$p^{(m)} = (t^m R') \cap R \quad \forall\ m \in \mathbb{N} ,$$

wobei $t \in p$.

Nun beachte man:

$$
\begin{aligned}
p^{(m)} \underset{(A)}{=} p^{(m+1)} &\iff (t^m R') \cap R = (t^{m+1} R') \cap R \\
&\iff t^m R' = t^{m+1} R' \\
&\quad \text{"}\Rightarrow\text{": } 9.1.2,(2) \\
&\iff t^m \in t^{m+1} R' \\
&\underset{p \neq (0)}{\iff} 1 \in \left(\frac{t^{m+1}}{t^m} R' = \right) tR' \\
&\iff t \in (R')^{\times} \underset{9.2.4,(4)}{=\!=} R' \setminus pR' \\
&\underset{t \in R}{\iff} t \notin (pR') \cap R \underset{9.1.2,(1)}{=\!=} p
\end{aligned}
$$

Es war aber (XX) $t \notin p$.

• 9.6.6. Lemma

Vor.: Sei die Situation wie in 9.6.5.

$s \in \mathrm{Quot}\,(R)$ sei so gewählt, daß $(n \in \mathbb{N}$ fest$)$

$$p^n \subseteq (sR) \cap R \neq R$$

Beh.: $(sR) \cap R = p^{(m)}$ für ein $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$

Beweis:

(1) (Beh.): $(sR) \cap R = p^{(m)}$ für ein $m \in \mathbb{N}$

Sei r ein zu $(sR) \cap R$ gehöriges Primideal

Dann ist nach 9.6.1.

r ein minimales Primideal in R

$$p^n \subseteq (sR) \cap R \subseteq r \underset{9.3.5.}{\Longrightarrow} p \subseteq r$$

$$\Rightarrow r = p$$

D.h. $(sR) \cap R$ ist ein Primärideal zu dem *minimalen* Primideal p.

Dann gilt nach 9.5.3.

$$(sR) \cap R = p^{(m)} \quad \text{für ein } m \in \mathbb{N}$$

(2) (Beh.): $m \leq n$

Wir betrachten dazu die Primärkomponentenzerlegung von p^n; nach 9.6.4. hat sie die Form

$$p^n = p^{(n)} \cap \bigcap_{i=2}^{l} q_i,$$

wobei $p \subsetneq \sqrt{q_i} \quad \forall\, i = 2, \ldots, l$

o.B.d.A. sei $l \geq 2$

(Im Fall $l = 1$ ist natürlich
$p^{(n)} = p^n \subseteq p^{(m)} \underset{9.6.5.}{\Longrightarrow} m \leq n$)

Dann ist insbesondere

$p^{(n)} \cdot (q_2 \cap \ldots \cap q_l) \subseteq (p^n \underset{\text{Vor.}}{\subseteq}) \; p^{(m)}$

A: $m > n \underset{9.6.5.}{\Longrightarrow} p^{(n)} \subsetneq p^{(m)}$

$\Rightarrow q_2 \cdot \ldots \cdot q_l \underset{\text{triv.}}{\subseteq} q_2 \cap \ldots \cap q_l \subseteq p^{(m)} \underset{9.6.4.}{\subseteq} p$

$\underset{9.3.5.}{\Rightarrow} q_i \subseteq p$ für ein $i \in \{2,\ldots,l\}$

$\Rightarrow \sqrt{q_i} \subseteq \sqrt{p} = p$ für ein $i \in \{2,\ldots,l\}$ ⨳ $(p \subsetneq \sqrt{q_i}$!)

• 9.6.7. Lemma

Vor.: Sei die Situation wie in 9.6.5.

$s = \frac{s_1}{s_2} \in \text{Quot}(R)$, $s_2 \notin p$ sei (gemäß 9.6.3.) so gewählt, daß

$p = (sR) \cap R$

Beh.: $p^{(n)} = (s^n R) \cap R \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

Beweis:
Der Beweis wird durch Induktion nach n erbracht.

Induktionsanfang: $p^{(1)} = p \underset{\text{Vor.}}{=} (sR) \cap R$.

Induktionsschluß: Schluß von n auf n+1.

Sei $p^{(n)} = (s^n R) \cap R$.

Wir zeigen, daß diese Formel auch für n+1 statt n gilt.

$p \subseteq sR \Rightarrow p^{n+1} \subseteq s^{n+1}R$

⌈z.B. für $n = 1$:

$\Sigma p_i p_i' \in p^2$

⌊ $\Rightarrow \Sigma p_i p_i' = \Sigma s r_i s r_i' = s^2 \; \Sigma r_i r_i' \in s^2 R$

$(s^{n+1}R) \cap R \neq R$

⌈A: $(s^{n+1}R) \cap R \neq R$

$\Rightarrow (s^{-1})^{n+1} \in R$

Das hatten wir in 9.6.1, Beweisteil (0) festgestellt!

$\Rightarrow\ (s^{-1})^{n+1} - r = 0$ für ein $r \in R$

R ganz-abgeschlossen in Quot (R)

$\Rightarrow\ s^{-1} \in R$

$\Rightarrow\ (p =)\ (sR) \cap R = R$ ⨳

wie oben!

Aus $p^{n+1} \subseteq (s^{n+1}R) \cap R \neq R$ folgt nach 9.6.6. bereits

$(s^{n+1}R) \cap R = p^{(m)}$ für ein $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n+1$

Andererseits ist auch $m \geq n+1$:

A: $m \leq n$

$\Rightarrow\ (\ (s^nR) \cap R \underset{\uparrow}{=})\ p^{(n)} \subseteq p^{(m)} \subseteq (s^{n+1}R) \cap R \subseteq s^{n+1}R$

Induktions-Vor.

$\Rightarrow\ \forall \underbrace{r \in R : (s^n r \in R}_{\text{das erfüllt z.B. } r = s_2^n} \Rightarrow \cancel{s^n} r \in s^{\cancel{n+1}}R\ )$

$(s = \frac{s_1}{s_2}$; siehe Vor.)

$\Rightarrow\ s_2^n \in (sR) \cap R = p$

$\Rightarrow\ s_2 \in p$ ⨳ (nach Vor. war $s_2 \in R \setminus p$)

p prim

- 9.6.8. Satz

Vor.: Sei R ein NOETHER'scher Integritätsbereich

R sei ganz-abgeschlossen in seinem Quotientenkörper Quot (R)

p sei ein minimales Primideal in R, $p \neq (0)$

$n \in \mathbb{N}$

Beh.: $p^{(n)} = R : (R:p^n) = R : (R:p)^n$

Beweis:

(0) Nach 9.6.6./7. ist

$$p^{(n)} = \bigcap_{\substack{s \in \mathrm{Quot}(R) \\ p^n \subseteq (sR) \cap R}} (sR) \cap R \quad \text{und}$$

$$p^{(n)} = \bigcap_{\substack{s_i \in \mathrm{Quot}(R) \\ p \subseteq (s_iR) \cap R}} (s_1 \cdot \ldots \cdot s_n R) \cap R$$

⌈Zur ersten Formel:

Nach 9.6.6. gilt für alle $s \in \mathrm{Quot}\,(R)$ mit $p^n \subseteq (sR) \cap R \neq R$:

$$p^{(n)} \subseteq p^{(m)} = (sR) \cap R \quad \text{für ein } m \in \mathbb{N}.$$

Nach 9.6.5./7. gibt es auch ein $s \in \mathrm{Quot}\,(R)$ mit

$$p^{(n)} = (sR) \cap R.$$

Zur zweiten Formel:

Liegt $p \subseteq (s_i R) \cap R$, $s_i \in \mathrm{Quot}\,(R)$ $(i = 1,\ldots,n)$, dann liegt

$$p^n \subseteq (s_1 \cdot \ldots \cdot s_n R) \cap R.$$

Nach 9.6.6. gilt wieder auf alle Fälle

$$p^{(n)} \subseteq (s_1 \cdot \ldots \cdot s_n R) \cap R$$

Nach 9.6.5./7. gibt es auch ein $s \in \mathrm{Quot}\,(R)$ mit

$$p \subseteq (sR) \cap R \quad \text{und} \quad p^{(n)} = (s^n R) \cap R$$
⌊

(1) (Beh.): $\displaystyle\bigcap_{\substack{s \in \mathrm{Quot}(R) \\ p^n \subseteq (sR) \cap R}} (sR) \cap R = R : (R : p^n)$

$$\bigcap_{\substack{s \in \mathrm{Quot}(R) \\ p^n \subseteq (sR) \cap R}} (sR) \cap R$$

$$= \{r \in R \mid r \in sR \quad \forall\, s \in \mathrm{Quot}\,(R) \quad \text{mit } \underbrace{p^n \subseteq sR}_{(\Rightarrow\, s \neq 0)}\}$$

$$\underset{s \,\|\, s^{-1}}{=} \{r \in R \mid rs \in R \quad \forall\, \underbrace{s \in \mathrm{Quot}\,(R)\setminus\{0\}}_{\substack{\text{Man kann auch } s = 0 \\ \text{noch zulassen.}}} \quad \text{mit } sp^n \subseteq R\}$$

$$= \{r \in R \mid r \cdot \underbrace{\{s \in \mathrm{Quot}\,R \mid sp^n \subseteq R\}}_{= R : p^n} \subseteq R\}$$

$$= \{r \in \mathrm{Quot}\,(R) \mid r \cdot (R : p^n) \subseteq R\}$$

⌈"$\supseteq$" Wegen $1 \in R : p^n$ hat man:

$$r \cdot (R : p^n) \subseteq R \xRightarrow[(r \in \mathrm{Quot}\,(R))]{} r = r \cdot 1 \in R$$
⌊

$$= R : (R : p^n)$$

(2) (Beh.): $\bigcap\limits_{\substack{s_i \in \mathrm{Quot}(R) \\ p \subseteq (s_i R) \cap R}} (s_1 \cdot \ldots \cdot s_n R) \cap R = R : (R:p)^n$

$$\bigcap\limits_{\substack{s_i \in \mathrm{Quot}(R) \\ p \subseteq (s_i R) \cap R}} (s_1 \cdot \ldots \cdot s_n R) \cap R$$

$$= \{r \in R \mid r \in s_1 \cdot \ldots \cdot s_n R \quad \forall s_i \in \mathrm{Quot}(R) \text{ mit } \underbrace{p \subseteq s_i R}_{(\Rightarrow s_i \neq 0)}\}$$

$$\underset{s_i \| s_i^{-1}}{=} \{r \in R \mid r s_1 \cdot \ldots \cdot s_n \in R \quad \forall \underbrace{s_i \in \mathrm{Quot}(R) \setminus \{0\}}_{\substack{\text{Man kann auch } s_i = 0 \\ \text{noch zulassen.}}} \text{ mit } s_i p \subseteq R\}$$

$$= \{r \in R \mid r \cdot (\underbrace{\{s \in \mathrm{Quot}(R) \mid sp \subseteq R\}}_{= R:p})^n \subseteq R\}$$

$$= \{r \in \mathrm{Quot}(R) \mid r \cdot (R:p)^n \subseteq R\}$$

["$\supseteq$" Wegen $1 \in R:p$ hat man

$$r \cdot (R:p)^n \subseteq R \xRightarrow[(r \in \mathrm{Quot}(R))]{} r = r \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \in R$$

$$= R : (R:p)^n$$

•• 9.7. Nullteilerfreiheit reduzierter, ganz-abgeschlossener Stellenringe

Wir verifizieren hier auf rein algebraischem Wege die Bemerkung in 1.6., daß der Halm der Strukturgarbe eines reduzierten komplexen Raumes in einem normalen Punkt keine Nullteiler besitzt. Dieser Abschnitt ist unabhängig von den vorherigen.

Vorweg ein einfacher Hilfssatz:

• 9.7.1. Lemma

Vor.: Sei R ein kommutativer Ring.

$R_1, \ldots, R_n$ seien Ideale in R mit:

$$\bigcap_{i=1}^{n} R_i = (0) \quad \text{und}$$

$$R_i + \bigcap_{j \neq i} R_j = R \quad \forall i$$

Beh.: $R = \bigoplus_{i=1}^{n} R/R_i$

(genauer: R und $\bigoplus_{i=1}^{n} R/R_i$ sind in natürlicher Weise isomorph.)

Beweis:

(1) (Beh.): $R = \sum_{i=1}^{n} S_i$, wobei $S_i := \bigcap_{j \neq i} R_j \quad \forall i$.

$$r \in R = R_i + \bigcap_{j \neq i} R_j = R_i + S_i \quad \forall i .$$

$$\Rightarrow \quad r = r_i + s_i \quad \text{mit } r_i \in R_i,\ s_i \in S_i \quad \forall i .$$

$$\Rightarrow \quad r = \sum_{j=1}^{n} s_j + \underbrace{(r - s_i)}_{= r_i \in R_i} - \sum_{j \neq i} \underbrace{s_j}_{\in S_j \subseteq R_i} \quad \forall i$$

$$\Rightarrow \quad r = \sum_{j=1}^{n} s_j \pmod{R_i} \quad \forall i$$

$$\Rightarrow \quad r = \sum_{j=1}^{n} s_j \quad (\text{mod} \underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} R_i}_{= (0)})$$

$$\Rightarrow \quad r = \sum_{j=1}^{n} s_j \in \sum_{i=1}^{n} S_i$$

(2) (Beh.): Die Summe $\sum_{i=1}^{n} S_i$ ist direkt

$$S_i \cap \sum_{j \neq i} S_j \subseteq S_i \cap R_i = \bigcap_{j=1}^{n} R_j = (0)$$

(3) (Beh.): $S_i \cong R/R_i \quad \forall i$

$$R = R_i \oplus \bigcap_{j \neq i} R_j = R_i \oplus S_i$$

$$R = \bigoplus_{j=1}^{n} S_j$$

$$\Rightarrow \quad R_i = \bigoplus_{j \neq i} S_j$$

$$R = \bigoplus_{j=1}^{n} S_j \quad \Rightarrow \quad S_i \cong R / \bigoplus_{j \neq i} S_j$$

$$\Rightarrow \quad S_i \cong R/R_i$$

• *9.7.2.* Satz

Vor.: Sei R ein Stellenring

(d.h. ein NOETHER'scher Ring mit *genau einem* maximalen Ideal)

R sei ganz-abgeschlossen in seinem totalen Quotientenring Quot (R) und R besitze *keine* nilpotenten Elemente

Beh.: R ist ein Integritätsbereich

Beweis:

(1) Sei $(0) = \bigcap_{i=1}^{n} p_i$ die Primärkomponentenzerlegung von (0)

(Beh.): Alle p_i sind prim und

die Menge der Nullteiler in R ist genau $\bigcup_{i=1}^{n} p_i$.

R besitzt keine nilpotenten Elemente $\iff$ $(0) = \sqrt{(0)}$

$\sqrt{(0)} = \sqrt{\bigcap_{i=1}^{n} p_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \sqrt{p_i}$ ist die Zerlegung von $\sqrt{(0)}$ in Primärkomponenten

$\Rightarrow$ $p_i = \sqrt{p_i}$ prim $\forall$ i

Einschub: Man kann o.B.d.A. $n \geq 2$ annehmen.

Im Fall n = 1 ist nämlich $(0) = p_1$ prim, also R ein Integritätsbereich.

Bleibt der Fall $n \geq 2$ zu untersuchen.

Wir werden zeigen, daß dieser Fall *nicht* eintreten kann.

p_i prim $\forall$ i $\Rightarrow$ r Nichtnullteiler $\forall\, r \in R \setminus \bigcup_{i=1}^{n} p_i$

[Sei $x \in R$ mit $rx \in (0) = \bigcap_{i=1}^{n} p_i$

$\Rightarrow$ $rx \in p_i$ $\forall$ i

$r \notin p_i$ $\forall$ i

$\Rightarrow$ $x \in p_i$ $\forall$ i

p_i prim

$\Rightarrow$ $x \in \bigcap_{i=1}^{n} p_i = (0)$

$\Rightarrow$ $x = 0$

$\Rightarrow$ Die Menge der Nullteiler von R ist genau $\bigcup_{i=1}^{n} p_i$

[Es ist nur noch zu zeigen, daß alle Nichtnullteiler in $R \setminus \bigcup_{i=1}^{n} p_i$ liegen.

Das ist aber trivial, denn:

$$r \in \bigcup_{i=1}^{n} p_i \Rightarrow \text{o.B.d.A. } r \in p_1$$

$$\Rightarrow r \cdot p \in \bigcap_{i=1}^{n} p_i = (0) \quad \text{für ein } p \in (\bigcap_{i>1} p_i) \setminus \{0\} \quad (\underset{\overset{\uparrow}{n \geq 2}}{\neq \emptyset} \,!)$$

$$\Rightarrow r \text{ Nullteiler}$$

(2) Sei S := Quot (R) der totale Quotientenring von R

(Beh.): In S gilt $(0) = \bigcap_{i=1}^{n} Sp_i$ und

alle Sp_i sind maximal

$\bigcap_{i=1}^{n} Sp_i = (0)$, denn:

$$s \in \bigcap_{i=1}^{n} Sp_i \Rightarrow s \in Sp_i \quad \forall i$$

$$\Rightarrow \forall i \; \exists \; p_i \in p_i, \; s_i', s_i'' \in R \; \text{ mit: } s = \frac{s_i'}{s_i''} \cdot p_i$$

$$\Rightarrow s^n = \frac{s_1' \cdot \ldots \cdot s_n'}{s_1'' \cdot \ldots \cdot s_n''} \cdot \underbrace{p_1 \cdot \ldots \cdot p_n}_{\in \bigcap_{i=1}^{n} p_i = (0)} = 0$$

$\Rightarrow$ s nilpotent in S = Quot (R)
R enthält keine nilpotenten Elemente
$\Rightarrow s = 0$

Nach (1) ist $S = \dfrac{R}{R \setminus \bigcup_{i=1}^{n} p_i}$

Da $p_i \cap (R \setminus \bigcup_{i=1}^{n} p_i) = \emptyset$ und nach (1) p_i prim, folgt daraus,

daß auch Sp_i prim ist (vgl. etwa 9.1.2,(5)).

Also ist S/Sp_i ein Integritätsbereich.

Wegen S = Quot (R) ist in S/Sp_i jeder Nichtnullteiler eine Einheit.

Zusammen folgt, daß S/Sp_i ein Körper ist, also Sp_i maximal.

(3) (Beh.): $S = \bigoplus_{i=1}^{n} S/Sp_i$

Da die Sp_i maximal sind, sind sie paarweise teilerfremd.

Daher gilt (wie in 9.4.3,Beweisteil (1)), daß $Sp_i + \bigcap_{j \neq i} Sp_j = S \quad \forall i$

Es gelten also folgende Dinge:

$Sp_1, \ldots, Sp_n$ sind Ideale in S mit:

$$\bigcap Sp_i = (0) \quad \text{und}$$

$$Sp_i + \bigcap_{j \neq i} Sp_j = S.$$

Dann folgt die (Beh.) aus Lemma 9.7.1.

(4) Nach Annahme ist $n > 1$

$\xRightarrow[(2),(3)]{}$ S ist direkte Summe mehrerer Körper

$\Rightarrow\ \exists\, e \in S\setminus\{0,1\}$, e Idempotent

[Man wähle für e die Eins eines Teilkörpers von S.
Dann ist sicher $e \neq 0$.
$e \neq 1$, sonst wäre (falls $e \in S_i$) : $S_i = eS = S$ ⨳

$\Rightarrow\ \exists\, e \in R\setminus\{0,1\}$, e Idempotent

$$\left.\begin{array}{l} \text{e Idempotent} \Rightarrow e^2 - e = 0 \Rightarrow \text{e ganz über } R \\ R \text{ ganz-abgeschlossen in } S = \text{Quot}(R) \end{array}\right\rangle\ e \in R$$

$\Rightarrow\ \exists\, e \in R$ mit : e und 1-e sind Nichteinheiten

$$\left.\begin{array}{l} e(1-e) = e^2 - e = 0 \\ e \neq 0 \\ 1-e \neq 0 \end{array}\right\rangle\ \text{e und 1-e Nullteiler, also Nichteinheiten}$$

$\Rightarrow$ $1 = e + (1-e)$ liegt im maximalen Ideal von R ⨳

R lokaler Ring !

Also kann der Fall $n > 1$ nicht eintreten;
mithin ist $n = 1$ und R ein Integritätsbereich.

•• 9.8. Primidealkettensatz von KRULL

Die letzten drei Abschnitte des algebraischen Anhangs sind dem wesentlichen algebraischen Teil des Beweises des OKA'schen Normalitätskriteriums 4.6. für analytische Hyperflächen gewidmet. Das tiefliegendste algebraische und überhaupt wesentlichste Hilfsmittel des in 4.6. ausgeführten Beweises ist der Ungemischtheitssatz 9.9.7. von COHEN-MACAULAY; dieser Satz wird in Abschnitt 9.9. behandelt. Im vorliegenden Abschnitt 9.8. bringen wir die notwendigen allgemeinen Vorbereitungen zum Beweis des Ungemischtheitssatzes. Im letzten Abschnitt 9.10. werden dann die algebraischen Hilfsmittel für 4.6. nur noch auf die brauchbarste Form gebracht.

Es soll an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, daß K. OKA sein Normalitätskriterium rein analytisch bewiesen hat; einen solchen Beweis findet man z.B. in [WH] Chap. 8 Sec. 1. Theorem 1B(d) S. 251 - 253. Daß wir den algebraischen Weg gewählt haben, hat zweierlei Gründe: Zum einen wollten wir die Bedeutung des algebraischen Normalitätskriteriums 9.2.5. unterstreichen und zum anderen ist der algebraische Beweis - wie wir in 4.6. bemerkt haben - wesentlich verallgemeinerungsfähig.

Wir wollen nun noch ein Wort dazu sagen, was wir in den letzten drei Abschnitten des Anhangs von den vorherigen verwenden werden: Die (triviale) Aussage 9.3.5. für Primideale wird häufig benutzt werden. Der Durchschnittsatz 9.4.1. von KRULL wird öfter vorkommen. *Alle* Aussagen des Abschnitts 9.5. werden wir wesentlich einsetzen; das Primkriterium 9.5.1. wird sogar sehr oft verwendet werden. Schließlich können wir noch 9.6.4. und 9.7.2. Beweisteil (1) brauchen. Auch der elementare Satz der Gruppentheorie über Kompositionsreihen wird benötigt (aber hier natürlich nicht bewiesen).

• 9.8.1. Definition

- Kodimension -

Sei R ein NOETHER'scher Ring.

(1) Ein Primideal p in R heißt r-codimensional ($\operatorname{codim}_R p = r$), wenn es eine nicht verfeinerbare Primidealkette

$$p_0 \subsetneqq p_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq p_r = p$$

mit (r+1) Gliedern - und *keine* längere - gibt,

wobei $p_0 = (0)$, falls R Integritätsbereich,

p_0 zu (0) gehöriges minimales Primideal , sonst.

(2) Sei a ein Ideal in R mit der Primärkomponentenzerlegung

$$a = \bigcap_{i=1}^{s} a_i .$$

Dann definieren wir

$$\operatorname{codim}_R a := \min_{i=1,\dots,s} \operatorname{codim} \sqrt{a_i}$$

• 9.8.2. Lemma

- Ideale in Restklassenringen -

Vor.: Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement

a sei ein Ideal in R und

$\overline{R} := R/\mathfrak{a}$ $\quad (\overline{} : R \to \overline{R}$ sei der kanonische Homomorphismus)

Beh.: (1) Die Zuordnung

$$\{\mathfrak{b} \mid \mathfrak{b} \text{ Ideal in } R,\ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}\} \ni \mathfrak{b} \longmapsto \overline{\mathfrak{b}} \in \{\mathfrak{b}' \mid \mathfrak{b}' \text{ Ideal in } \overline{R}\}$$

ist bijektiv.

(2) Die Zuordnung unter (1) erhält die Relationen $\subseteq$ und $=$

(3) Die Zuordnung unter (1) erhält die zwischen Idealen definierten Operationen

Summe,

Durchschnitt und

Quotient

(4) Bei der Zuordnung unter (1) darf man in den Mengenklammern beiderseits ersetzen

"Ideal" durch "Primideal" und

"Ideal" durch "Primärideal"

(5) Für jedes Ideal $\mathfrak{b}$ in R mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ gilt:

$$\overline{\sqrt{\mathfrak{b}}} = \sqrt{\overline{\mathfrak{b}}}$$

(Insbesondere erhält die Zuordnung unter (1) mögliche Primärkomponentenzerlegungen)

Beweis:

Die Beweise bestehen in trivialen Nachrechnungen in der angegebenen Reihenfolge; wir beweisen exemplarisch, daß (4) die Zuordnung

$$\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ Primideal in } R,\ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\} \ni \mathfrak{p} \longmapsto \overline{\mathfrak{p}} \in \{\mathfrak{p}' \mid \mathfrak{p}' \text{ Primideal in } \overline{R}\}$$

bijektiv ist:

Die Zuordnung ist wohldefiniert,

denn: Sei $\mathfrak{p}$ in R prim, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$.

Dann ist $\overline{\mathfrak{p}}$ nach (1) ein Ideal in R.

$\overline{\mathfrak{p}}$ ist auch prim:

$$\overline{rs} \in \overline{\mathfrak{p}} \Rightarrow rs \in \overline{}^{-1}(\overline{\mathfrak{p}}) \underset{(1)}{=} \mathfrak{p}$$

$$\underset{\mathfrak{p}\text{ prim}}{\Longrightarrow} r \in \mathfrak{p} \vee s \in \mathfrak{p}$$

$$\Rightarrow \overline{r} \in \overline{\mathfrak{p}} \vee \overline{s} \in \overline{\mathfrak{p}}$$

Die Zuordnung ist bijektiv,

denn: Die Umkehrung ist natürlich (wie in (1)) $\mathfrak{p}' \longmapsto \overline{}^{-1}(\mathfrak{p}')$

$(\mathfrak{p}'$ prim in $\overline{R})$.

Mit p' in $\overline{R}$ ist ja auch $\overline{}^{\,-1}(p')$ in R prim:

$$\begin{aligned} rs \in \overline{}^{\,-1}(p') \quad &\Rightarrow \quad \overline{rs} \in p' \\ &\underset{p' \text{ prim}}{\Rightarrow} \quad \overline{r} \in p' \;\vee\; \overline{s} \in p' \\ &\Rightarrow \quad r \in \overline{}^{\,-1}(p') \;\vee\; s \in \overline{}^{\,-1}(p') \end{aligned}$$

• <u>9.8.3.</u> Lemma

Vor.: Sei R ein Stellenring
mit dem maximalen Ideal m
m sei das *einzige* Primideal in R

Beh.: R ist ARTIN'sch
(d.h. in R gilt der Vielfachkettensatz)

Beweis:

(0) Fassen wir R auf als ABEL'sche Gruppe mit R als Operatorenbereich.
Dann sind die Ideale des Ringes R gerade die (bzgl. der Anwendung der Operatoren) zulässigen Normalteiler der Gruppe R.
Aus der Theorie der Gruppen (mit Operatoren) ist bekannt:
Wenn es in einer Gruppe mit Operatoren (überhaupt) eine Kompositionsreihe gibt,
dann läßt sich jede echte Normalreihe zu einer Kompositionsreihe verfeinern.
(vgl. etwa [WAEI] Kap. 7 §51 S. 154)

Es genügt also zu zeigen,
daß es in der Gruppe R überhaupt eine Kompositionsreihe gibt.

(1) Da m das *einzige* Primideal in R ist,
sind alle Ideale in R Primärideale zu m.
(Bei der Primärkomponentenzerlegung eines Ideals in R kann eben nur m als zugehöriges Primideal auftreten.)

Insbesondere ist (0) ein zu m gehöriges Primärideal und
$\exists\, \rho \in \mathbb{N}$ mit : $m^{\rho} = (0)$.
Wir gehen aus von der Vielfachenkette

$$(0) = m^{\rho} \subseteq m^{\rho-1} \subseteq \ldots \subseteq m$$

und zeigen, daß sich in diese Kette nur noch endlich viele Ideale einschalten lassen.

Sei $k \in \{1,2,\ldots,\rho-1\}$.

Da m maximal ist, ist R/m ein Körper und wir können m^k/m^{k+1} als Vektorraum über R/m betrachten.

Da m^k eine endliche Idealbasis besitzt, ist dieser Vektorraum endlichdimensional. Daher können zwischen m^k und m^{k+1} höchstens endlich viele Ideale eingeschoben werden; es gibt also eine Kompositionsreihe von m^k nach m^{k+1}.

Reiht man nun diese Kompositionsreihen für $k = 1,2,\ldots,\rho-1$ aneinander, so erhält man eine Kompositionsreihe von m zu (0).

• 9.8.4. Lemma

- 2. Hauptidealsatz von KRULL -

Vor.: Sei R ein NOETHER'scher Ring.
$a = aR$ sei ein echtes Hauptideal in R und
p sei ein minimaler Primteiler von a

Beh.: $\operatorname{codim} p \leq 1$

Beweis:

(1) (Beh.): Man kann o.B.d.A. R als nullteilerfreien Stellenring mit dem maximalen Ideal p voraussetzen.

Nehmen wir nämlich *an*, es gäbe eine Primidealkette

$p_0 \subsetneqq p_1 \subsetneqq p.$

Dann ist $\overline{R} := R/p_0$ ein NOETHER'scher Integritätsbereich mit (beachte 9.8.2.):

$\overline{a} = \overline{a}\,\overline{R}$ ist ein echtes Hauptideal in $\overline{R}$,

$\overline{p}$ ist ein minimaler Primteiler von $\overline{a}$ und

es gibt eine Primidealkette $(0) \subsetneqq \overline{p_1} \subseteq \overline{p}$

Nun gehe man in die Lokalisierung $R' := \overline{R}_{\overline{p}} = \dfrac{\overline{R}}{\overline{R}\setminus\overline{p}}$

und betrachte $p' := R'\overline{p}$ (beachte 9.2.4.):

$p' = R'\overline{p}$ ist maximal in R',

$a' = \overline{a}\,R'$ ist ein echtes Hauptideal in R'

(beachte: $a \in p \Rightarrow \overline{a} \in R'\overline{p} = p'$) ,

p' ist ein minimaler Primteiler von a' und

es gibt eine Primidealkette $(0) \subsetneqq p_1' \subsetneqq p'$

$(p_1' := R'\overline{p_1})$

Ist nun der Satz für R' statt R bewiesen, dann folgt daraus ein *Widerspruch*.

Schreiben wir also R statt R'! (Auch das eben definierte $\overline{R}$ wollen wir wieder vergessen.)

(2) Sei also R ein nullteilerfreier Stellenring mit dem maximalen Ideal p. Sei p_1 ein Primideal zwischen (0) und p:

$$(0) \subseteq p_1 \subsetneqq p$$

(Wir wollen zeigen, daß $p_1 = (0)$ gilt.)

(Beh.): $\exists\, n \in \mathbb{N} : \quad p_1^{(n)} \subseteq (p\cdot p_1^{(n)},\, p_1^{(n+\rho)}) \quad \forall\, \rho \in \mathbb{N}$

Da p ein minimaler Primteiler von a ist, ist

$\overline{R} := R/a$ nach 9.8.3. ein ARTIN'scher Ring.

Also bricht in $\overline{R}$ folgende Vielfachenkette ab:

$$\overline{p_1} \supseteq \overline{p_1^{(2)}} \supseteq \overline{p_1^{(3)}} \supseteq \cdots$$

Sei etwa $\overline{p_1^{(n)}} = \overline{p_1^{(n+\rho)}} \quad \forall\, \rho \in \mathbb{N}$, insbesondere:

$$p_1^{(n)} \subseteq (a, p^{(n+\rho)}) \qquad \forall\, \rho \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow p_1^{(n)} = (a, p_1^{(n+\rho)}) \cap p_1^{(n)} \qquad \forall\, \rho \in \mathbb{N}$$

$$= (a \cap p_1^{(n)},\, p_1^{(n+\rho)})$$

["DEDEKIND'sches Modulaxiom"; beachte nur:

Wegen $p_1^{(n+\rho)} \subseteq p_1^{(n)}$ gilt für $a' + p' \in (a, p_1^{(n+\rho)})$

$a' + p' \in p_1^{(n)} \iff a' \in p_1^{(n)}$]

$$= (a\cdot p_1^{(n)},\, p_1^{(n+\rho)})$$

[$a \cap p_1^{(n)} \underset{\text{Def.}}{=} \{ar \mid r \in R,\ ar \in p_1^{(n)}\} \underset{\text{Def.}}{=} a\cdot(p_1^{(n)} : a)$

Da p minimaler Primteiler von a ist und $p_1 \subsetneqq p$, liegt

$$a \nsubseteq p_1$$

Da $p_1^{(n)}$ nach 9.6.4. Primärideal zu p_1 ist, folgt daraus mit 9.5.1.:

$$p_1^{(n)} : a = p_1^{(n)}$$

Zusammen: $a \cap p_1^{(n)} = a\cdot p_1^{(n)}$]

$$\underset{a \subseteq p}{\subseteq} (p\cdot p_1^{(n)},\, p_1^{(n+\rho)}) \qquad \forall\, \rho \in \mathbb{N}$$

(3) (Beh.): $p_1^{(n)} \subseteq p_1^{(n+\rho)} \quad \forall\, \rho \in \mathbb{N}$

Wir gehen hier mit der Beziehung unter (2) in $\overline{R} := R/p_1^{(n+\rho)}$:

$$\overline{p_1^{(n)}} \subseteq \overline{p}\cdot\overline{p_1^{(n)}}$$

Da $\overline{R}$ (mit R) NOETHER'sch ist, hat $\overline{p_1^{(n)}}$ eine endliche Basis:

Sei etwa $\overline{p_1^{(n)}} = \sum_{i=1}^{l} \overline{R}\, p_i$.

Nun gilt

$$p_i = \sum_{j=1}^{l} m_{ij} p_j \qquad \text{für gewisse } m_{ij} \in \overline{p},$$

$$\text{d.h.} \quad \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{l1} & \cdots & m_{ll} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_l \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \; (m_{ij} - \delta_{ij})_{i,j} \cdot (p_j)_j = (0)$

$\Rightarrow \; \det\,((m_{ij} - \delta_{ij})_{i,j}) \cdot p_k = 0 \quad \forall\, k$

$\Rightarrow \; \det\,((m_{ij} - \delta_{ij})_{i,j}) \cdot \overline{p_1^{(n)}} = 0$

Entwickeln der Determinante zeigt, daß sie die Form m - 1 hat mit $m \in \overline{p}$.
Da $\overline{R}$ (mit R) Stellenring und $\overline{p}$ sein maximales Ideal,
ist dann m - 1 eine Einheit in $\overline{R}$.

$\Rightarrow \; \overline{p_1^{(n)}} = (0)$

$\Rightarrow \; p_1^{(n)} \subseteq p_1^{(n+\rho)}$

(4) Nach (3) ist nun

$$p_1^{(n)} = p_1^{(k)} \quad \forall\, k \geq n$$

$$\Rightarrow \; p_1^{(n)} = \bigcap_{k=1}^{\infty} p_1^{(k)}$$

$$= \Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} \big(p_1 \tfrac{R}{R\setminus p_1}\big)^k\Big) \cap R$$

$$= (0)$$

Durchschnittsatz 9.4.1. von KRULL

$$\Rightarrow \; p_1 = \sqrt{p_1^{(n)}} = \sqrt{(0)} = (0)$$

9.6.4. R Integritätsbereich

• 9.8.5. Lemma

- Primidealkettensatz von KRULL -

Vor.: Sei R ein NOETHER'scher Ring
$a = (a_1, \dots, a_l)$ sei ein echtes Ideal in R und
p ein minimaler Primteiler von a

Beh.: $\operatorname{codim} p \leq l$

Beweis:

(0) o.B.d.A. sei R ein Stellenring mit dem maximalen Ideal p.
Ansonsten betrachte man statt R die Lokalisierung R_p.

Wir beweisen den Satz nun durch vollständige Induktion nach l.
Induktionsanfang: $l = 1$
In diesem Fall folgt die Aussage sofort aus dem 2. Hauptidealsatz 9.8.4.
Induktionsschluß: Schluß von $l-1$ auf l:

(1) A: Es gibt in R ein Primideal p' mit

$$p' \subsetneqq p \quad \text{und} \quad \operatorname{codim} p' \geq l.$$

o.B.d.A. gebe es *kein* Primideal echt zwischen p' und p.
(Man beachte, daß in R der Teilerkettensatz gilt!)

o.B.d.A. sei $a_1 \notin p'$

$\lceil p' \subsetneqq p$ und p *minimaler* Primteiler von a

$\Rightarrow a \nsubseteq p'$

$\Rightarrow a_i \notin p'$ für ein $i \in \{1, \dots, l\}$.

$\lfloor$ Nach evtl. Umnumerierung der a's : $a_1 \notin p'$

Dann ist

(p', a_1) Primärideal zu (dem maximalen Ideal) p

$\lceil a_1 \notin p' \Rightarrow p' \subsetneqq (p', a_1) \subseteq p$

Da p maximal ist und
da es *kein* Primideal echt zwischen p' und p gibt, ist dann

p der *einzige* Primteiler von (p', a_1)

und daher

$\lfloor$ (p', a_1) primär mit zugehörigem Primideal p.

(2) Daraus folgt

$$(\mathfrak{a}^n \subseteq)\ \mathfrak{p}^n \subseteq (\mathfrak{p}', a_1) \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N}.$$

Sei

$$a_i^n = b_i + a_1 r_i \quad \text{mit } b_i \in \mathfrak{p}',\ r_i \in R \quad (i = 2,\dots,l)$$

Wir betrachten nun das Ideal

$$\mathfrak{b} := \sum_{i=2}^{l} b_i R \subseteq \mathfrak{p}'$$

Einerseits können wir ein Primideal $\mathfrak{r}$ finden mit

$$\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{r} \subsetneqq \mathfrak{p}' \quad (\subsetneqq \mathfrak{p})$$

⌈Wegen $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}'$
liefert 9.3.5. angewandt auf die Primärkomponentenzerlegung von $\mathfrak{b}$ einen minimalen Primteiler $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{p}'$.
Nach Induktionsvoraussetzung ist codim $\mathfrak{r} \leq l-1$, aber nach Wahl von $\mathfrak{p}'$ codim $\mathfrak{p}' \geq \ell$.

Daher gilt

⌊ $\mathfrak{r} \subsetneqq \mathfrak{p}'$

(3) Andererseits ist

$\mathfrak{p}$ ein *minimaler* Primteiler von $(\mathfrak{r}, a_1)$

⌈Zunächst folgt aus der Definition der b_i, daß für eine Potenz $\mathfrak{a}^\rho$ von $\mathfrak{a}$ gilt:

$$\mathfrak{a}^\rho \subseteq (\mathfrak{b}, a_1) \quad (\subseteq (\mathfrak{r}, a_1))$$

(Man setze z.B. $\rho := l(n-1) + 1$
und beachte, daß $\mathfrak{a}^\rho$ erzeugt wird von allen Produkten der a_i mit ρ Faktoren; in jedem solchen Produkt muß mindestens ein Faktor a_i mehr als $(n-1)$-mal, also mindestens n-mal vorkommen und somit in $(\mathfrak{b}, a_1)$ liegen.)

Natürlich liegt $\mathfrak{r} \subseteq (\mathfrak{p}' \subseteq)\ \mathfrak{p}$ und $a_1 \in \mathfrak{p}$.

Ist nun $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}$ ein weiterer Primteiler von $(\mathfrak{r}, a_1)$, dann hat man:

$$(\mathfrak{r}, a_1) \subseteq \mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}$$

$$\Rightarrow \mathfrak{a}^\rho \subseteq \mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}$$

$$\Rightarrow \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}$$

9.3.5. $\qquad \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$

⌊ $\mathfrak{p}$ minimaler Primteiler von $\mathfrak{a}$

Nun gehen wir in den nullteilerfreien Stellenring $\overline{R} := R/\mathfrak{r}$:

$\overline{p}$ ist ein *minimaler* Primteiler von $(\overline{(\mathfrak{r},a_1)} =)\ (\overline{a_1})$

Dann liefert der 2. Hauptidealsatz 9.8.4. von KRULL:

$\overline{p}$ ist ein *minimales* Primideal in $\overline{R}$

$$\left[\begin{array}{l} \overline{a}_1 \neq \overline{0}, \\ \quad \text{denn: } \left.\begin{array}{r} a_1 \notin p' \\ \mathfrak{r} \subseteq p' \end{array}\right\rangle \; a_1 \notin \mathfrak{r} \Rightarrow \overline{a}_1 \neq \overline{0} \\ \overline{a}_1 \neq \overline{1}, \\ \quad \text{denn: } a_1 \in a \subseteq p \Rightarrow \overline{a}_1 \in \overline{p} \text{ maximales Ideal in } \overline{R} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ p ist ein *minimaler* Primteiler von $\mathfrak{r}$ XX (2)

Anmerkung zum Beweis:

Schlüsse wie in der Klammer in (2) mit 9.3.5. und der Primärkomponentenzerlegung von b werden im weiteren noch öfter vorkommen; wir werden an solchen Stellen dann nur mehr kurz sagen: "Üblicher Schluß mit 9.3.5.". Wir wollen daher hier diese einfache Schlußweise nochmals an obigem Beispiel ausführlich demonstrieren:

Ist $b = \bigcap_{i=1}^{r} q_i$ die Primärkomponentenzerlegung von b,

dann ist

$$\prod_{i=1}^{r} q_i \underset{\text{triv.}}{\subseteq} \bigcap_{i=1}^{r} q_i = b \subseteq p'$$

$$\underset{9.3.5.}{\Rightarrow} \quad q_i \subseteq p' \quad \text{für ein } i$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{q_i} \subseteq \sqrt{p'} = p' \quad \text{für ein } i.$$

o.B.d.A. sei $\sqrt{q_1}$ ein minimaler Primteiler von b.

(Wiederholung des eben angeführten "üblichen Schlusses mit 9.3.5." mit einem (beliebigen) minimalen Primteiler $\mathfrak{r}$ von b statt p' zeigt nämlich, daß $\mathfrak{r}$ ein zu b gehöriges Primideal ist. Man braucht also nur unter den in p' gelegenen $\sqrt{q_i}$'s das minimale herausgreifen.)

Nun setze $\quad \mathfrak{r} := \sqrt{q_1}$.

9.9. Ideale der Hauptklasse

9.9.1. Definition

Sei R ein NOETHER'scher Ring

Ein Ideal $\mathfrak{a}$ in R heißt ein *Ideal der l-ten Hauptklasse* $(l \in \mathbb{N})$,
wenn gilt: 1) $\mathfrak{a} = (a_1,\dots,a_l)$ besitzt eine l-gliedrige Basis
2) $\operatorname{codim} \mathfrak{a} \geq l$

Bemerkung:

Nach dem Primidealkettensatz 9.8.5. von KRULL gilt für jedes Ideal $\mathfrak{a}$, welches der Bedingung 1) genügt: $\operatorname{codim} \mathfrak{a} \leq l$.
Daher gilt für ein Ideal $\mathfrak{a}$ der l-ten Hauptklasse sogar: $\operatorname{codim} \mathfrak{a} = l$.

9.9.2. Satz

\- Charakterisierung der 1. Hauptklasse -

Vor.: Sei R ein NOETHER'scher faktorieller Ring
$\mathfrak{a}$ sei ein echtes Ideal in R

Beh.: Folgende Aussagen sind äquivalent
(i) $\mathfrak{a}$ ist ein Hauptideal.
(ii) $\mathfrak{a}$ besitzt nur Primärkomponenten, die zu minimalen Primidealen gehören.

Beweis:

"(i) $\Rightarrow$ (ii)"

R ist ein NOETHER'scher Integritätsbereich und als faktorieller Ring ganz-abgeschlossen in seinem Quotientenkörper.
Dann ist nach 9.5.2. jedes zur Primärkomponentenzerlegung eines echten Hauptideals $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal ein in R minimales Primideal.

"(ii) $\Rightarrow$ (i)"

Nach 9.5.3. hat die Primärkomponentenzerlegung von $\mathfrak{a}$ die Form

$\mathfrak{a} = \bigcap_{j=1}^{r} \mathfrak{p}_j^{(n_j)}$ mit minimalen Primidealen $\mathfrak{p}_j$ in R.

Nach dem Beweis zu 9.5.4. hat jedes $\mathfrak{p}_j^{(n_j)}$ die Form

$$\mathfrak{p}_j^{(n_j)} = \left(t_j^{n_j} \frac{R}{R\setminus\mathfrak{p}_j}\right) \cap R,$$

wobei $t_j \in \mathfrak{p}_j$, charakterisiert durch $\mathfrak{p}_j = \left(t_j \frac{R}{R\setminus\mathfrak{p}_j}\right) \cap R$.

Da R faktoriell ist, kann man annehmen, daß

$$\mathfrak{p}_j = t_j R \quad (\forall j)$$

[Sei nämlich t'_j ein Primfaktor von t_j, der in p_j liegt, und
$t_j = t'_j t''_j$.
Dann gilt

$$t'_j R \subseteq p_j = (t'_j t''_j \frac{R}{R \setminus p_j}) \cap R \subseteq (t'_j \frac{R}{R \setminus p_j}) \cap R \underset{\substack{\uparrow \\ 9.1.2,(1) \\ \text{da } t'_j R \text{ prim.}}}{=} t'_j R$$

also $p_j = t'_j R$.]

Dann sind auch die Primärkomponenten von $\mathfrak{a}$ Hauptideale:

$$p_j^{(nj)} = (p_j^{nj} =) \; t_j^{nj} R$$

[Einerseits sind natürlich alle $t_j^m R$ $(m \in \mathbb{N})$ zu $p_j = t_j R$ gehörige Primärideale

und nach 9.1.2,(1) $t_j^m R = (t_j^m \frac{R}{R \setminus p_j}) \cap R$.

Andererseits hatten wir oben

$$p_j^{(nj)} = (t_j^{nj} \frac{R}{R \setminus p_j}) \cap R$$]

Zusammen erhält man:

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{j=1}^{r} (t_j^{nj} R) = (\prod_{j=1}^{r} t_j^{nj}) R \quad , \text{ein Hauptideal}$$

zu "$\subseteq$": [$a \in t_j^{nj} R \quad \forall j$

$\Rightarrow t_j^{nj} \mid a \quad \forall j$

$\Rightarrow (\prod_{j=1}^{r} t_j^{nj}) \mid a$, da die t_j paarweise verschiedene Primelemente waren.]

• 9.9.3. Lemma

Vor.: Sei R ein NOETHER'scher faktorieller Ring
$\mathfrak{a}$ sei in R ein echtes Ideal der l-ten Hauptklasse $(l \geq 2)$

Beh.: $\mathfrak{a}$ besitzt eine l-gliedrige Basis $(a_1,\dots,a_l)$, so daß die Ideale

$a_1R, \quad a_1R + a_2R, \quad \dots, \quad a_1R + a_2R + \dots + a_lR = \mathfrak{a}$

der Reihe nach in R Ideale der 1-ten, 2-ten, ..., l-ten Hauptklasse sind.

Beweis:

(1) Sei zunächst mal $(a'_1,\dots,a'_l)$ eine beliebige l-gliedrige Basis von $\mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{a} = \sum_{i=1}^{l} a_i' R .$$

Daraus konstruieren wir in (2) für $k = 1,\dots,l-1$ induktiv Elemente $a_k \in \mathfrak{a}$ mit:

$$\begin{cases} \operatorname{codim}\left(\sum_{\varkappa=1}^{k} a_\varkappa R\right) \geq k \quad \text{und} \\ a_k - a_k' \in \sum_{\varkappa=k+1}^{l} a_\varkappa' R \qquad\qquad (*) \end{cases}$$

Dann sind wir fertig:

Setzt man nämlich noch $a_l := a_l'$,

dann ist $(a_1,\dots,a_l)$ eine Basis von $\mathfrak{a}$ mit der gewünschten Eigenschaft:

Da nach Vor. $\operatorname{codim} \mathfrak{a} = l$, ist nur noch zu zeigen,
daß dann $a_1,\dots,a_l$ wirklich ganz $\mathfrak{a}$ erzeugen.

Das garantiert die Gleichung (*):

$$a_l' \underset{\text{Def.}}{=} a_l \in \sum_{\varkappa=1}^{l} a_\varkappa R$$

$$\Rightarrow a_{l-1}' \underset{(*)}{\in} a_{l-1} + a_l' R \subseteq \sum_{\varkappa=1}^{l} a_\varkappa R$$

$$\Rightarrow a_{l-2}' \underset{(*)}{\in} a_{l-2} + a_{l-1}' R + a_l' R \subseteq \sum_{\varkappa=1}^{l} a_\varkappa R$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow a_1' \underset{(*)}{\in} a_1 + a_2' R + \dots + a_l' R \subseteq \sum_{\varkappa=1}^{l} a_\varkappa R$$

(2) Wir schreiten nun zur Konstruktion der $a_1,\dots,a_{l-1}$:
Induktionsanfang:

Sei $a_1 := a_1'$

Dann ist natürlich Gleichung (*) erfüllt und wegen der Charakterisierung 9.9.2. der 1. Hauptklasse ist

$$\operatorname{codim}(a_1 R) = 1$$

[Da $\mathfrak{a}$ nach Vor. $\neq R$ ist, hat man sicher $a_1 \neq 1$.

Wäre $a_1 = 0$, dann wäre nach 9.8.5. $\operatorname{codim} \mathfrak{a} \leq l-1$; *aber* nach Vor. ist $\operatorname{codim} \mathfrak{a} = l$.

Also ist $a_1 R$ ein *echtes* Ideal in R und 9.9.2. anwendbar.]

Induktionsschluß:

Seien $a_1,\dots,a_{k-1}$ bereits konstruiert.

Sei zur Abkürzung $\mathfrak{a}_{k-1} := \sum_{\varkappa=1}^{k-1} a_\varkappa R$.

Die (k-1)-codimensionalen, zur Primärkomponentenzerlegung von $\mathfrak{a}_{k-1}$ gehörigen Primideale mögen gerade

$\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ sein.

1. Fall: $a_k' \notin \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$

Dann setze $a_k := a_k'$ und Gleichung (*) ist bereits klar.

Sei $\mathfrak{r}$ ein zu $\mathfrak{a}_k := \sum_{\varkappa=1}^{k} a_\varkappa R$ gehöriges Primideal.

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathfrak{a}_{k-1} \subseteq \mathfrak{r}, \\ a_k' \in \mathfrak{r} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{r} & \text{für ein zu } \mathfrak{a}_{k-1} \text{ gehöriges Primideal } \mathfrak{p} \\ a_k' \in \mathfrak{r} \end{cases}$$

üblicher Schluß mit 9.3.5.

$$\Rightarrow \begin{cases} \textit{entweder} \text{ ist } \mathfrak{p}_i \subsetneqq \mathfrak{r} & \text{für ein } i \in \{1,\dots,n\} \\ \textit{oder} \text{ ist } \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{r} & \text{für ein zu } \mathfrak{a}_{k-1} \text{ gehöriges Primideal } \mathfrak{p} \text{ mit} \\ & \operatorname{codim} \mathfrak{p} \geq k \end{cases}$$

[Wegen $\operatorname{codim} \mathfrak{a}_{k-1} \geq k-1$, hat jedes zu $\mathfrak{a}_{k-1}$ gehöriges Primideal $\mathfrak{p}$ eine Kodimension $\geq k-1$.

zu "*entweder*" beachte noch: $a_k' \notin \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$.]

$\Rightarrow \operatorname{codim} \mathfrak{r} \geq k$

Zusammen: $\operatorname{codim} \mathfrak{a}_k = \min_{\mathfrak{r}} \operatorname{codim} \mathfrak{r} \geq k$

2. Fall: $a_k' \in \mathfrak{p}_i$ für ein i

Hier stellen wir die Situation des 1. Falles her mit einem Element $a_k \in a_k' + \sum_{\varkappa=k+1}^{1} a_\varkappa' R$ statt a_k'.

Nach evtl. Umnumerierung der $\mathfrak{p}_i$ gilt:

$$a_k' \notin \bigcup_{i=1}^{i_0} \mathfrak{p}_i \quad \text{und} \quad a_k' \in \mathfrak{p}_{i_0+1} \qquad (i_0 \in \{0,\dots,n-1\})$$

o.B.d.A. sei $a'_{k+1} \notin p_{i_o+1}$

$\lceil$ A: $a'_{k+1}, \ldots, a'_l \in p_{i_o+1}$

$\Rightarrow \ a \underset{(*)}{\subseteq} (a_{k-1}, a'_k, a'_{k+1}, \ldots, a'_l) \subseteq p_{i_o+1}$

$\Rightarrow$ codim $a \leq$ codim $p_{i_o+1} = k-1 < l$ ⨳

$\lfloor$

Wir wählen nun ein

$$\lambda \in \left(\bigcap_{i=1}^{i_o} p_i\right) \setminus p_{i_o+1}$$

$\lceil$ A: $\left(\bigcap_{i=1}^{i_o} p_i\right) \setminus p_{i_o+1} = \emptyset$

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{i_o} p_i \subseteq p_{i_o+1}$$

$$\underset{9.3.5.}{\Rightarrow} \quad p_i \subseteq p_{i_o+1} \qquad \text{für ein } i \in \{1, \ldots, i_o\}$$

$$\Rightarrow \quad p_i = p_{i_o+1} \qquad \text{für ein } i \neq i_o+1 \quad ⨳$$

codim p_i = codim p_{i_o+1}

$\lfloor$

Dann gilt für $a''_k := a'_k + \lambda a'_{k+1} \quad (\in a'_k + \sum_{\varkappa=k+1}^{l} a'_\varkappa R)$:

$$a''_k \notin \bigcup_{i=1}^{i_o+1} p_i$$

$\lceil$ 1) A: $a''_k \in p_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, i_o\}$

$$\Rightarrow \ a'_k = \underbrace{a''_k}_{\in p_i} - \underbrace{\lambda}_{\in p_i} a'_{k-1} \in p_i \quad ⨳$$

2) A: $a''_k \in p_{i_o+1}$

$$\Rightarrow \ \lambda a'_{k+1} = \underbrace{a''_k}_{\in p_{i_o+1}} - \underbrace{a'_k}_{\in p_{i_o+1}} \in p_{i_o+1}$$

$\lambda \notin p_{i_o+1}$

$\Rightarrow \ a'_{k+1} \in p_{i_o+1}$ ⨳

p_{i_o+1} prim

$\lfloor$

Ist a_k'' in überhaupt keinem p_i mehr enthalten, dann setze man $a_k := a_k''$.

Ansonsten wiederhole man die eben durchgeführte Prozedur mit a_k'' statt a_k'. Nach endlich vielen Schritten erhält man auf diese Weise sicher ein Element $a_k \in a_k' + \sum_{\varkappa=k+1}^{1} a_\varkappa' R$ mit $a_k \notin \bigcup_{i=1}^{n} p_i$ und der zweite Fall ist auf den ersten zurückgeführt.

• 9.9.4. Hilfssatz

Vor.: Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. $p_1,\dots,p_n$ seien echte Primideale in R und p sei ein weiteres Primideal in R

Beh.: $p \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} p_i \Rightarrow p \subseteq p_i$ für (wenigstens) ein $i \in \{1,\dots,n\}$

Beweis:

Wir beweisen umgekehrt durch Induktion nach n,

daß gilt: $p \nsubseteq p_i \quad \forall\, i = 1,\dots,n \quad \Rightarrow \quad p \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{n} p_i$.

Induktionsanfang: $n = 1$

trivial.

Induktionsschluß: Schluß von n-1 auf n.

Nach Induktionsvoraussetzung ist $p \nsubseteq \bigcup_{\substack{i=1\\ i\neq i_o}}^{n} p_i \quad \forall\, i_o = 1,\dots,n$

$\Rightarrow \forall\, i_o = 1,\dots,n \quad \exists\, p_{i_o} \in p$ mit $p_{i_o} \notin \bigcup_{\substack{i=1\\ i\neq i_o}}^{n} p_i$

1. Fall: $p_{i_o} \notin p_{i_o}$ für ein $i_o \in \{1,\dots,n\}$

Dann ist für dieses i_o auch $p_{i_o} \notin \bigcup_{i=1}^{n} p_i$, also $p \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{n} p_i$.

2. Fall: $p_{i_o} \in p_{i_o} \quad \forall\, i_o = 1,\dots,n$

Dann betrachte

$$p := \sum_{i_o=1}^{n} r_{i_o} \quad , \quad r_{i_o} := p_1\cdot\ldots\cdot p_{i_o-1}\cdot p_{i_o+1}\cdot\ldots\cdot p_n \quad \forall\, i_o.$$

Natürlich liegt $p \in \mathfrak{p}$.

Da $p_{i_o} \notin \mathfrak{p}_i \quad \forall\, i_o \neq i$ und da alle $\mathfrak{p}_i$ prim sind, liegt

$$r_i = p_1 \cdot \ldots \cdot p_{i-1} \cdot p_{i+1} \cdot \ldots \cdot p_n \notin \mathfrak{p}_i \quad \forall\, i.$$

Wegen $p_i \in \mathfrak{p}_i \quad \forall\, i$ liegt andererseits

$$r_{i_o} = p_1 \cdot \ldots \cdot p_{i_o-1} \cdot p_{i_o+1} \cdot \ldots \cdot p_n \in \mathfrak{p}_i \quad \forall\, i \neq i_o$$, insbesondere auch

$$\sum_{\substack{i_o=1 \\ i_o \neq i}}^{n} r_{i_o} \in \mathfrak{p}_i \quad \forall\, i$$

A: $p \in \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$, etwa $p \in \mathfrak{p}_i$ für festes i

$$\Rightarrow \quad r_i \underset{\text{Def. } p}{=} p - \sum_{\substack{i_o=1 \\ i_o \neq i}}^{n} r_{i_o} \in \mathfrak{p}_i \quad ⨳$$

• 9.9.5. Hilfssatz

Vor.: Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement.
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ seien Ideale in R

Beh.: $\mathfrak{a} : (\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}:\mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a}:\mathfrak{c})$

Beweis:

"$\subseteq$" $\mathfrak{b} \subseteq (\mathfrak{b},\mathfrak{c})$

$$\underset{\text{triv.}}{\Rightarrow} \quad \mathfrak{a} : (\mathfrak{b},\mathfrak{c}) \subseteq \mathfrak{a}:\mathfrak{b}$$

Ebenso: $\mathfrak{a} : (\mathfrak{b},\mathfrak{c}) \subseteq \mathfrak{a}:\mathfrak{c}$

$$\Rightarrow \quad \mathfrak{a} : (\mathfrak{b},\mathfrak{c}) \subseteq (\mathfrak{a}:\mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a}:\mathfrak{c})$$

"$\supseteq$" Sei $\vartheta := (\mathfrak{a}:\mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a}:\mathfrak{c})$

Dann ist also $\vartheta \subseteq \mathfrak{a}:\mathfrak{b}$ und $\vartheta \subseteq \mathfrak{a}:\mathfrak{c}$

$$\underset{\text{triv.}}{\Rightarrow} \quad \vartheta\,\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \text{ und } \vartheta\,\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}$$

$$\Rightarrow \quad \vartheta\,(\mathfrak{b},\mathfrak{c}) \underset{\text{triv.}}{=} (\vartheta\mathfrak{b}, \vartheta\mathfrak{c}) \subseteq \mathfrak{a}$$

$$\underset{\text{triv.}}{\Rightarrow} \quad \vartheta \subseteq \mathfrak{a} : (\mathfrak{b},\mathfrak{c})$$

• 9.9.6. Lemma

Vor.: Sei R ein Stellenring
mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$.
$\mathfrak{a}$ sei ein echtes Ideal in R, welches *keine* $\mathfrak{m}$-primäre Komponente besitzt.

Beh.: (i) Es gibt ein $m \in \mathfrak{m}$ mit $\operatorname{codim}_R(\mathfrak{a},m) \geq \operatorname{codim}_R \mathfrak{a} + 1$

(ii) Man kann ein solches $m \in \mathfrak{m}$ so wählen, daß gilt:

Besitzt $\mathfrak{a}$ eine ρ-codimensionale Primärkomponente,
dann besitzt $(\mathfrak{a},m)$ eine mindestens $(\rho+1)$-codimensionale Primärkomponente.

Beweis:

(1) Wir betrachten zunächst die Vor., daß $\mathfrak{a}$ keine $\mathfrak{m}$-primäre Komponente besitzt:
$\mathfrak{a}$ besitzt keine $\mathfrak{m}$-primäre Komponente

$\iff \mathfrak{m} \nsubseteq \mathfrak{p}$ für alle zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primideale $\mathfrak{p}$

$\iff \mathfrak{m} \nsubseteq \bigcup\limits_{\substack{\mathfrak{p} \text{ Primideal} \\ \text{zu } \mathfrak{a}}} \mathfrak{p}$

"⇒": 9.9.4.

$\iff \exists\, m \in \mathfrak{m}$ mit: $m \notin \mathfrak{p}$ für alle zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primideale $\mathfrak{p}$

$\iff \exists\, m \in \mathfrak{m}$ mit: $\mathfrak{a} : m = \mathfrak{a}$

9.5.1.

Sei nun so ein m fest gewählt!

(2) Diese Wahl von m impliziert bereits $\operatorname{codim}_R (\mathfrak{a},m) \geq \operatorname{codim}_R \mathfrak{a} + 1$:
Sei $\mathfrak{r}$ ein zu $(\mathfrak{a},m)$ gehöriges Primideal

$\Rightarrow \begin{cases} \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r}, \\ m \in \mathfrak{r} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{r} & \text{für ein zu } \mathfrak{a} \text{ gehöriges Primideal } \mathfrak{p} \\ m \in \mathfrak{r} \end{cases}$

üblicher Schluß mit 9.3.5.

$\Rightarrow \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{r}$ für ein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal $\mathfrak{p}$

da nach Wahl von m in (1) gilt: $m \notin \mathfrak{p}$

$\Rightarrow \operatorname{codim}_R \mathfrak{r} \geq \operatorname{codim}_R \mathfrak{p} + 1 \underset{\text{Def.}}{\geq} \operatorname{codim}_R \mathfrak{a} + 1$

(3) Wir bereiten den Beweis der Gemischtheitsaussage (ii) mit einem Hilfssatz vor:

(Beh.): *Ist* $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Ideal in R,

so daß (p,m) in *keinem* zu (a,m) gehörigen Primideal liegt,
dann liegt auch p in *keinem* zu a gehörigen Primideal.

Zunächst stellen wir fest:

(p,m) liegt in *keinem* zu (a,m) gehörigen Primideal

$$\underset{9.5.1.}{\Rightarrow} \quad (a,\mathrm{m}) = (a,\mathrm{m}) : (p,\mathrm{m})$$

$$(a,\mathrm{m}) : (p,\mathrm{m}) \underset{9.9.5.}{=} [(a,\mathrm{m}):p] \cap \underbrace{[(a,\mathrm{m}):\mathrm{m}]}_{\underset{\text{triv.}}{=} R} = (a,\mathrm{m}):p$$

$$\Rightarrow \quad (a,\mathrm{m}) = (a,\mathrm{m}):p$$

$$a:p \underset{\text{triv.}}{\subseteq} (a,\mathrm{m}):p$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a:p \subseteq (a,\mathrm{m})}$$

Wir zeigen nun, daß aus dieser Formel bereits folgt,

daß $a:p \subseteq a$

(Dann liegt wegen 9.5.1. p natürlich in *keinem* zu a gehörigen Primideal)

Sei also $r_1 \in a:p$ beliebig vorgegeben:

$r_1 \in a:p \subseteq (a,\mathrm{m})$

Dann gilt in $\overline{R} := R/a$:

$$\overline{r_1}\,\overline{p} = \overline{0} \qquad \text{und} \qquad \overline{r_1} = \overline{r_2}\,\overline{\mathrm{m}}$$

mit einem $r_2 \in R$

Dann hat aber r_2 dieselben Eigenschaften wie r_1:

$r_2 \in a:p \subseteq (a,\mathrm{m})$

$$\overline{r_2}\,\overline{\mathrm{m}}\,\overline{p} = \overline{r_1}\,\overline{p} = \overline{0}$$

$$\Rightarrow \quad r_2\,\mathrm{m}\,p \subseteq a$$

$$\Rightarrow \quad r_2\,p \subseteq a:\mathrm{m} \underset{(1)}{=} a$$

$$\Rightarrow \quad r_2 \in a:p \subseteq (a,\mathrm{m})$$

So fortfahrend erhält man

eine Folge $(r_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq R$ mit

$$\overline{r_1} = \overline{r_2}\,\overline{m} = \overline{r_3}\,\overline{m}^2 = \overline{r_4}\,\overline{m}^3 = \ldots ,$$

insbesondere ist (beachte: $m \in \mathfrak{m}$)

$$\overline{r_1} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{m}}^n$$

Nun beachte man, daß $\overline{R} = R/\mathfrak{a}$ mit R ein Stellenring mit dem maximalen Ideal $\overline{\mathfrak{m}}$ ist; insbesondere enthält $\overline{m} - \overline{1}$ nur Einheiten und wir können den Durchschnittsatz 9.4.1. von KRULL (man beachte den dort geführten Beweis!) anwenden:

$$\overline{r_1} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{m}}^n = (\overline{0}),$$

also $r_1 \in \mathfrak{a}$, was wir zeigen wollten.

(4) Nun folgert man leicht (ii):

Sei $\mathfrak{p}$ ein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges, ρ-codimensionales Primideal:

$$\operatorname{codim}_R \mathfrak{p} = \rho \in \mathbb{N}$$

Dann liegt nach (3) zunächst mal

$(\mathfrak{p},m)$ in einem zu $(\mathfrak{a},m)$ gehörigen Primideal $\mathfrak{r}$

und es liefert wieder der übliche Schluß mit 9.3.5., daß

wenigstens ein zu $(\mathfrak{p},m)$ gehöriges Primideal $\widetilde{\mathfrak{p}}$

in einem zu $(\mathfrak{a},m)$ gehörigen Primideal $\mathfrak{r}$ enthalten ist.

Da nach (1) $m \notin \mathfrak{p}$, erhält man andererseits wie in (2):

$$\operatorname{codim}_R (\mathfrak{p},m) \geq \operatorname{codim}_R \mathfrak{p} + 1 = \rho + 1$$

Zusammen:

$$\begin{aligned} \operatorname{codim} \mathfrak{r} \ &\underset{\widetilde{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{r}}{\overset{\uparrow}{\geq}}\ \operatorname{codim} \widetilde{\mathfrak{p}} \\ &\underset{\text{Def.}}{\geq}\ \operatorname{codim} (\mathfrak{p},m) \\ &\geq\ \rho + 1. \end{aligned}$$

• 9.9.7. Lemma

- Ungemischtheitssatz von COHEN-MACAULAY -

Vor.: Sei $R := \mathbb{C}\{z_1,\ldots,z_n\}$ der Potenzreihenring in n Veränderlichen über $\mathbb{C}$; $\mathfrak{a}$ sei ein echtes Ideal der l-ten Hauptklasse $(l \in \{1,\ldots,n\})$

Beh.: $\mathfrak{a}$ ist ungemischt,

d.h. *alle* zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primärkomponenten sind l-codimensional.

Beweis:

(1) Zur Abkürzung bezeichne $\mathfrak{m} := \sum_{i=1}^{n} z_i R$ das maximale Ideal in R.

Nach der Charakterisierung 9.9.2. der 1. Hauptklasse ist der Satz richtig für $l = 1$.

Weiter ist die Behauptung auch richtig für $l = n$:

Sei $\mathfrak{p}$ ein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal.
Dann ist

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } (R,\mathfrak{m}) \text{ Stellenring} \\ \text{und } \mathfrak{a} \neq R}}{\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}} \qquad \text{und} \quad \operatorname{codim} \mathfrak{p} \underset{\text{Def.}}{\geq} \operatorname{codim} \mathfrak{a} = l = n = \operatorname{codim} \mathfrak{m}$$

$\Rightarrow \mathfrak{p} = \mathfrak{m}$

Also ist $\mathfrak{m}$ das einzige zu $\mathfrak{a}$ gehörige Primideal und somit $\mathfrak{a}$ Primärideal, also per definitionem ungemischt.

Es genügt also, die Behauptung für $l = 2,\ldots,n-1$ zu zeigen.

(2) (Beh.): Es genügt zu zeigen,
daß $\mathfrak{a}$ keine zu $\mathfrak{m}$ gehörige Primärkomponente besitzt.

Nehmen wir nämlich *an*,

$\mathfrak{a}$ sei gemischt und
wir hätten bereits gezeigt, daß *kein* Hauptklassenideal einer Kodimension $< n$ eine $\mathfrak{m}$-primäre Komponente hat,

dann liefert uns 9.9.6. einen Widerspruch:

Zunächst kann $\mathfrak{a}$ keine $\mathfrak{m}$-primäre Komponente besitzen.
Dann kann man aber nach 9.9.6,(i) ein $m \in \mathfrak{m}$ finden mit
$\operatorname{codim} (\mathfrak{a},m) \geq \operatorname{codim} \mathfrak{a} + 1 = l + 1$.
Da $\mathfrak{a}$ eine l-gliedrige Basis besitzt, ist dann für solche m insbesondere $(\mathfrak{a},m)$ ein Ideal der $(l+1)$-ten Hauptklasse.
Bestimmt man nun m gemäß 9.9.6,(i) + (ii), dann ist $(\mathfrak{a},m)$ auch wieder gemischt.
So fortfahrend kann man zu $\mathfrak{a}$ endlich viele Elemente $m_1,\ldots,m_s \in \mathbb{N}$ hinzunehmen, so daß
$(\mathfrak{a},m_1,\ldots,m_s)$ ein Ideal der $(l+s)$-ten Hauptklasse ist, $(l+s) < n$, und $(\mathfrak{a},m_1,\ldots,m_s)$ eine $\mathfrak{m}$-primäre Komponente besitzt ⨳

(3) Wir beweisen nun die Behauptung des Satzes durch vollständige Induktion nach n.
Der Induktionsanfang $n = 1$ ist in (1) bereits erledigt worden.

Sei also (für den Induktionsschluß) $n \geq 2$ und

sei der Ungemischtheitssatz für $\mathbb{C}\{z_1\}$, $\mathbb{C}\{z_1,z_2\}$, ..., $\mathbb{C}\{z_1,z_2,\dots,z_{n-1}\}$ bereits gezeigt.

Wir überlegen uns gemäß (2),
daß $\mathfrak{a}$ (codim $\mathfrak{a} = 1 < n$) keine $\mathfrak{m}$-primäre Komponente hat.

Vorbereitungen:

Man wähle zu $\mathfrak{a}$ eine Basis $(a_1,\dots,a_l)$ gemäß 9.9.5.:

$\mathfrak{a} = (a_1,\dots,a_l)$

wobei (a_1), (a_1,a_2), ... Ideale der 1-ten, 2-ten, ... Hauptklasse sind.

o.B.d.A. sei z_n in keinem zu $\mathfrak{a}$ gehörigen 1-codimensionalen Primideal enthalten.

[A: Jedes z_i liegt in einem zu $\mathfrak{a}$ gehörigen 1-codimensionalen Primideal $\mathfrak{p}$:

$z_i \in \mathfrak{p}$

$$\Rightarrow \mathfrak{m} \; \left(= \sum_{i=1}^{n} Rz_i \right) \subseteq \underbrace{\qquad\qquad}_{\substack{\mathfrak{p} \text{ Primideal zu } \mathfrak{a}, \\ \operatorname{codim} \mathfrak{p} = 1}} \mathfrak{p}$$

$\underset{9.9.4.}{\Rightarrow}$ $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}$ für ein 1-codimensionales Primideal $\mathfrak{p}$

XX Wegen $\operatorname{codim}_R \mathfrak{m} = n > 1$ gilt für jedes zu $\mathfrak{a}$ gehörige

1-codimensionale Primideal $\mathfrak{p}$:

$\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{m}$]

(4) Dann stellen wir für $\overline{R} := R/z_nR \cong \mathbb{C}\{z_1,\dots,z_{n-1}\}$ fest:

(Beh.): $\overline{\mathfrak{a}}$ ist ein Ideal der 1-ten Hauptklasse.

Wegen $\overline{\mathfrak{a}} = (\overline{a}_1,\dots,\overline{a}_l)$ haben wir nur zu zeigen,

daß codim $\overline{\mathfrak{a}} \geq 1$.

Sei dazu $\overline{\mathfrak{r}}$ ein Primteiler von $\overline{\mathfrak{a}}$.

Wir können (siehe etwa 9.8.2,(4)) annehmen, daß $\mathfrak{r}$ ein Primteiler von $(\mathfrak{a},z_n)$ ist.

Dann ist für ein geeignetes zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal $\mathfrak{p}$
$\mathfrak{r}$ auch Primteiler von $(\mathfrak{p},z_n)$

(Wegen $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r}$ liefert der übliche Schluß mit 9.3.5., daß $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{r}$ für ein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal $\mathfrak{p}$.)

1. Fall: $z_n \notin p$

Da codim $p \geq$ codim $a = l$, gibt es eine l-gliedrige Primidealkette

$$(0) \subsetneqq p_1 \subsetneqq p_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq p_l = p.$$

Wir betrachten nun die Idealkette

$$(0) \subseteq (z_n) \subseteq (p_1, z_n) \subseteq \cdots \subseteq (p_l, z_n) = (p, z_n).$$

r ist ein Primteiler von (p, z_n).

Darin liegt (wieder üblicher Schluß mit 9.3.5.) ein zu (p_{l-1}, z_n) gehöriges Primideal r_{l-1}:

$$(p_{l-1}, z_n) \subseteq r_{l-1} \subseteq r$$

o.B.d.A. sei r_{l-1} ein minimaler Primteiler von (p_{l-1}, z_n).

Dann ist $r_{l-1} \subsetneqq r$

⌈A: $r_{l-1} = r$

$\Rightarrow \quad p_{l-1} \subsetneqq p_l \subseteq r_{l-1}$

Nun gehe man in $\hat{R} := R/p_{l-1}$ (ein Integritätsbereich!):

$\widehat{r_{l-1}}$ ist minimaler Primteiler von $\widehat{(p_{l-1}, z_n)} = (\widehat{z_n})$

$\overset{}{\underset{9.8.4.}{\Longrightarrow}}$ $\widehat{r_{l-1}}$ ist minimales Primideal in $\hat{R}$

$\Rightarrow$ Zwischen p_{l-1} und r_{l-1} läßt sich *kein* weiteres Primideal einschieben

⌊Also ist $(z_n \in)\ r_{l-1} = p_l$ ⨳ $(z_n \notin p = p_l)$

So fortfahrend erhält man eine Primidealkette

$$(0) \subsetneqq (z_n) \subsetneqq r_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq r_l = r$$

(Beachte, daß $\overline{R} = R/(z_n) = \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_{n-1}\}$ ein Integritätsbereich ist und somit (z_n) ein Primideal in R.)

Nach Übergang zu $\overline{R} = R/(z_n)$ erhält man daraus eine Primidealkette

$$(0) \subsetneqq \overline{r}_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \overline{r}_l = \overline{r}$$

$\Rightarrow$ codim $\overline{r} \geq l$.

2. Fall: $z_n \in p$

Da codim $p \geq$ codim $a = l$ und

da z_n in keinem zu a gehörigen l-codimensionalen Primideal enthalten ist, gibt es hier eine $(l+1)$-gliedrige Primidealkette

$$(0) \subsetneqq p_1 \subsetneqq p_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq p_{l+1} = p.$$

Sei $k \in \{0,\dots,l\}$ derjenige Index mit

$z_n \notin p_k,\ z_n \in p_{k+1}$

o.B.d.A. sei $k \geq 1$ (sonst ist nichts mehr zu beweisen)

Nun verschafft man sich wie im 1. Fall eine Primidealkette

$$(0) \subsetneq (z_n) \subsetneq r_1 \subsetneq \dots \subsetneq r_k = p_{k+1}$$

Zusammen erhält man eine Primidealkette

$$(0) \subsetneq (z_n) \subsetneq r_1 \subsetneq \dots \subsetneq r_k \subsetneq p_{k+1} \subsetneq \dots \subsetneq p_{l+1} = r.$$

Daraus folgt wie im 1. Fall

$\operatorname{codim} \bar{r} \geq l.$

(5) (Beh.): $a : m = a$

Sei $r \in a:m$ vorgegeben. (Wir wollen sehen, daß r dann bereits in a liegt.)

d.h. $rm \subseteq a$,

d.h. $rz_i \in a \quad \forall\ i = 1,\dots,n$

Dann liegt insbesondere $rz_n \in a$, also

$$rz_n = \sum_{i=1}^{l} s_i a_i \qquad \text{für geeignete } s_i \in R \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ In $\bar{R} := R/(z_n) = \mathbb{C}\{z_1,\dots,z_{n-1}\}$ gilt: $\bar{0} = \sum_{i=1}^{l} \bar{s}_i \bar{a}_i$.

$$\Rightarrow \bar{s}_l \in \left(\sum_{i=1}^{l-1} \bar{a}_i \bar{R}\right) : \bar{a}_l$$

$$= \sum_{i=1}^{l-1} \bar{a}_i \bar{R}$$

[Zunächst ist z_n in keinem $(l-1)$-codimensionalen Primideal von $(a_1,\dots,a_{l-1})$ enthalten.

Wäre nämlich $z_n \in p$ für ein $(l-1)$-codimensionales Primideal p von $(a_1,\dots,a_{l-1})$, dann betrachte man (p,a_l):

Wegen $a \subseteq (p,a_l)$ ist $\operatorname{codim}(p,a_l) \geq \operatorname{codim} a = l$.
Da R ein NOETHER'scher faktorieller Ring ist, liefert die Charakterisierung 9.9.2. der 1. Hauptklasse für das $(l-1)$-codimensionale Primideal p eine $(l-1)$-gliedrige Basis

(Man betrachte eine Primidealkette

$$(0) \subsetneq p_1 \subsetneq \dots \subsetneq p_{l-1} = p$$

$\operatorname{codim} p_1 = 1 \Rightarrow p_1$ Hauptideal; o.B.d.A. $p_1 = (z_1)$

In $\hat{R} := R/p_1 = \mathbb{C}\{z_1,\dots,z_n\}$ ist

codim $\hat{p}_2 = 1 \Rightarrow \hat{p}_2$ Hauptideal; o.B.d.A. $\hat{p}_2 = (z_2)$

also $p_2 = (z_1, z_2)$

u.s.w.)

Dann ist nach dem Primidealkettensatz 9.8.5. codim $(p, a_l) \leq 1$.

Zusammen: codim $(p, a_l) = 1$.

Sei r ein 1-codimensionaler Primteiler von (p, a_l).
Dann ist r ein 1-codimensionaler Primteiler von a mit $z_n \in a$ $\lightning$ (3)

Daraus folgert man nun wie in (4), daß

$(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{l-1}})$ ein Ideal der (l-1)-ten Hauptklasse ist.

Also ist nach Induktionsvoraussetzung in $\overline{R} = \mathbb{C}\{z_1,\dots,z_{n-1}\}$

$(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{l-1}})$ ungemischt (l-1)-codimensional

A: $(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{l-1}}) : \overline{a_l} \neq (\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{l-1}})$

$\underset{9.5.1.}{\Longrightarrow}$ $\overline{a_l}$ liegt in einem zu $(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{l-1}})$ gehörigen Primideal

$\Rightarrow \overline{a}$ ($= \sum_{i=1}^{l} \overline{a_i}\, \overline{R}$) liegt in einem zu $(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{l-1}})$ gehörigen Primideal.

$\Rightarrow$ codim $\overline{a} \leq l-1$ $\lightning$ (4)

$(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{l-1}})$ ungemischt (l-1)-codimensional

$$\Rightarrow s_l \in (a_1, \dots, a_{l-1}, z_n)$$

$$\Rightarrow s_l = \sum_{i=1}^{l-1} t_i a_i + r_l z_n \qquad \text{für geeignete } t_i \in R,\ r_l \in R$$

$$\underset{(*)}{\Rightarrow} (r - r_l a_l) z_n = \sum_{i=1}^{l-1} (s_i + t_i a_l) a_i$$

Setze nun $r' := r - r_l a_l$ und

$$s_i' := s_i - t_i a_l \in R \qquad (i = 1, \dots, l-1)$$

und wiederhole den Vorgang:

$$(r - r_l a_l - r_{l-1} a_{l-1}) z_n = \sum_{i=1}^{l-2} s_i'' a_i \qquad \text{mit gewissen } s_i'' \in R,\ r_{l-1} \in R$$

Wiederholt man diesen Prozess noch (l-2)-mal (d.h. wendet man vollständige Induktion an), dann erhält man schließlich:

$$(r - r_l a_l - \dots - r_1 a_1) z_n = 0 \qquad , r_i \in R \qquad (i = 1, \dots, l)$$

$$\Rightarrow \quad r = \sum_{i=1}^{l} r_i a_i \in \mathfrak{a}$$

(6) Zusammen mit 9.5.1. liefert Punkt (5):

$\mathfrak{a}$ kann keine zu $\mathfrak{m}$ gehörige Primärkomponente besitzen.

Das war nach (3) zu beweisen.

9.10. Ein Normalitätskriterium

9.10.1. Lemma

Vor.: Sei R ein NOETHER'scher Ring.

$\mathfrak{a}$ sei ein Ideal in R, für das $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$ gilt.

Die Primärkomponentenzerlegung von $\mathfrak{a}$ sei gegeben durch

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{\alpha} \mathfrak{a}_i$$

(wegen $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$ sind dann alle $\mathfrak{a}_i$ Primideale in R)

Weiter sei $b \in R$ und $\mathfrak{b} = (\mathfrak{a}, b)$

Die Primärkomponentenzerlegung von $\mathfrak{b}$ sei gegeben durch

$$\mathfrak{b} = \bigcap_{j=1}^{\beta} \mathfrak{b}_j$$

Wir betrachten $\overline{R} := R/\mathfrak{a}$:

Beh.: $\overline{b}$ Nichtnullteiler in $\overline{R}$ $\iff$ $\sqrt{\mathfrak{b}_j} \not\subseteq \mathfrak{a}_i \quad \forall\, i,j$

Beweis:

Nach 9.7.2, Beweisteil (1) ist die Menge der Nullteiler in $\overline{R}$ gerade $\bigcup_{i=1}^{\alpha} \overline{\mathfrak{a}_i}$

[Mit R ist auch $\overline{R}$ NOETHER'sch und wegen $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ besitzt $\overline{R}$ *keine* nilpotenten Elemente.

Wegen 9.8.2. ist die Primärkomponentenzerlegung von $(\overline{0})$ in $\overline{R}$ gegeben durch

$$(\overline{0}) = \bigcap_{i=1}^{\alpha} \overline{\mathfrak{a}_i}.$$

In dieser Situation liefert Beweisteil (1) von 9.7.2. die Behauptung über die Menge der Nullteiler in $\overline{R}$.]

Nun gilt:

$$\overline{b} \text{ Nichtnullteiler in } \overline{R} \iff \overline{b} \notin \bigcup_{i=1}^{\alpha} \overline{\mathfrak{a}_i}$$

$$\iff \overline{b} \notin \overline{\mathfrak{a}_i} \quad \forall\, i$$

$$\Leftrightarrow \ b \notin (\overline{\quad}^{-1}(\overline{\mathfrak{a}_i}) \underset{\substack{\uparrow \\ 9.8.2.}}{=} \ ) \, \mathfrak{a}_i \quad \forall i$$

$$\underset{\text{Def.}\mathfrak{b}}{\Leftrightarrow} \ \mathfrak{b} \nsubseteq \mathfrak{a}_i \quad \forall i$$

$$\Leftrightarrow \ \bigcap_{j=1}^{\beta} \mathfrak{b}_j \nsubseteq \mathfrak{a}_i \quad \forall i$$

$$\Leftrightarrow \ \mathfrak{b}_j \nsubseteq \mathfrak{a}_i \quad \forall i,j$$

$\Big[$ "$\Leftarrow$" A: $\bigcap_{j=1}^{\beta} \mathfrak{b}_j \subseteq \mathfrak{a}_i$ für ein i

$\Rightarrow \ \Pi\, \mathfrak{b}_j \ (\subseteq \bigcap \mathfrak{b}_j) \subseteq \mathfrak{a}_i$

$\Rightarrow \ \mathfrak{b}_{j_o} \subseteq \mathfrak{a}_i$ für ein i und ein j_o ⨳

9.3.5. ($\mathfrak{a}_i$ prim) $\Big]$

$$\Leftrightarrow \ \sqrt{\mathfrak{b}_j} \nsubseteq \mathfrak{a}_i \quad \forall i,j$$

$\Big[$ "$\Leftarrow$" A: $\mathfrak{b}_j \subseteq \mathfrak{a}_i \ \Rightarrow \ \sqrt{\mathfrak{b}_j} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}_i} = \mathfrak{a}_i$ $\Big]$

• 9.10.2. Lemma

Vor.: Sei R ein NOETHER'scher Ring

$\mathfrak{a}$ sei ein echtes Ideal in R, für das $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$ gilt.

Sei $\overline{R} := R/\mathfrak{a}$ und $\overline{b}$ ($b \in R$) ein Nichtnullteiler in $\overline{R}$

$\mathfrak{b} := (\mathfrak{a}, b)$

Beh.: $\operatorname{codim}_R \mathfrak{b} \geq (\operatorname{codim}_R \mathfrak{a}) + 1$

Beweis:

Seien die Primärkomponentenzerlegungen von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ gegeben durch

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{\alpha} \mathfrak{a}_i$$

$$\mathfrak{b} = \bigcap_{j=1}^{\beta} \mathfrak{b}_j$$

Nun stellen wir fest:

$$\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{b} \subseteq) \bigcap_{j=1}^{\beta} \sqrt{\mathfrak{b}_j}$$

$$\Rightarrow \ \mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{b}_j} \quad \forall j$$

$$\Rightarrow \ \mathfrak{a}_{i_j} \subseteq \sqrt{\mathfrak{b}_j} \quad \text{für ein } i_j \text{ zu jedem } j$$

$\lceil\ \Pi\, a_i \subseteq \bigcap a_i \subseteq \sqrt{b_j}$ prim

$\underset{9.3.5.}{\Rightarrow}\ a_{i_j} \subseteq \sqrt{b_j}$ für ein i_j

$\Rightarrow\ a_{i_j} \subsetneqq \sqrt{b_j}$ für ein i_j zu jedem j (¶)

[Da $\overline{b}$ Nichtnullteiler in $\overline{R}$ liefert 9.10.1.

$\sqrt{b_j} \not\subseteq a_i \quad \forall\, i,j$

$\Rightarrow\ \operatorname{codim}_R \sqrt{b_j} \geq \min\limits_i \operatorname{codim} a_i + 1 \underset{\text{Def.}}{=} \operatorname{codim} a + 1 \quad \forall\, j$

$\Rightarrow\ \operatorname{codim}_R b \underset{\text{Def.}}{=} \min\limits_j \operatorname{codim}_R \sqrt{b_j} \geq \operatorname{codim} a + 1$

- 9.10.3. Satz

Vor.: Sei $R := \mathbb{C}\,\{z_1,\ldots,z_n\}$ der Potenzreihenring in n Veränderlichen über $\mathbb{C}$.

$a = aR$ sei ein echtes Hauptideal in R, für das $\sqrt{a} = a$ gilt.

$\overline{R} := R/a$ und

$\overline{b}$ ($b \in R$) sei Nichteinheit und Nichtnullteiler in $\overline{R}$

Beh.: $\overline{b}\,\overline{R}$ besitzt nur isolierte, 1-codimensionale Primärkomponenten.

Beweis:
Wir brauchen nur zu zeigen,
daß die Primärkomponenten von $\overline{b}\,\overline{R}$ 1-codimensional sind.

Sei $b := (a,b)$ mit der Primärkomponentenzerlegung $b = \bigcap\limits_{j=1}^{\beta} b_j$

Dann hat die Primärkomponentenzerlegung von $\overline{b}\,\overline{R}$ nach 9.8.2. die Form

$\overline{b}\,\overline{R} = \bigcap\limits_{j=1}^{\beta} \overline{b_j}$ und $\sqrt{\overline{b_j}} = \overline{\sqrt{b_j}} \quad \forall\, j$

Da $a \neq (0)$ und R Integritätsbereich, ist $\operatorname{codim} a \geq 1$.

Nach 9.10.2. ist dann $\operatorname{codim} b \geq 2$, also (nach Def. 9.9.1.)

b ein Ideal der 2. Hauptklasse.

Da $\overline{b}$ Nichteinheit in $\overline{R}$, ist

$b\ (= \overline{}^{-1}(\overline{b}\,\overline{R})\ ) \neq R$, also b ein echtes Ideal in R.

Der Ungemischtheitsatz 9.9.7. von COHEN-MACAULAY liefert in diesem Fall:

b ist ungemischt 2-codimensional : $\operatorname{codim}_R \sqrt{b_j} = 2 \quad \forall\, j = 1,\dots,\beta$

Daraus folgt nun

$$\operatorname{codim}_{\overline{R}} \underbrace{\sqrt{\overline{b_j}}}_{(=\ \overline{\sqrt{b_j}})} = 1 \quad .$$

["≥" einfacher Teil: gilt wegen $a \subseteq b$ (beachte Marke ¶ in 9.10.2, Bew.).

["≤" gilt wegen $\operatorname{codim}_R \sqrt{b_j} \le 2 \quad \forall\, j$

L I T E R A T U R V E R Z E I C H N I S

Aus folgenden Schriften wurden in der Arbeit gewisse Stellen direkt zitiert:

[BT] BEHNKE, H. und P. THULLEN: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 51. Zweite, erweiterte Auflage. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1970.

[FI] FISCHER, G.: Complex Analytic Geometry. Lecture Notes in Mathematics, Band 538. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1976.

[GU] GUNNING, R.C.: Lectures on Complex Analytic Varieties. The Local Parametrization Theorem. Princeton University Press, Princeton, N.J. 1970.

[KR] KERNER, H.: Komplexe Räume. Ausarbeitung der Vorlesung im SS 1969 an der Universität München. Korrigierter Nachdruck 1974.

[KA] ——— : Komplexe Analysis. Ausarbeitung der Vorlesung im WS 1969/70 an der Universität München. Korrigierter Nachdruck 1974.

[KU1] KUHLMANN, N.: Die Normalisierung komplexer Räume. Math. Ann. 144 (1961) 110 - 125.

[KU2] ——— : Über die normalen Punkte eines komplexen Raumes. Math. Ann. 146 (1962) 397 - 412.

[NA] NARASIMHAN, R.: Introduction to the Theory of Analytic Spaces. Lecture Notes in Mathematics, Band 25. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1966.

[WAEI] VAN DER WAERDEN, B.L.: Algebra, Teil I. 7. Auflage. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1966.

[WH] WHITNEY, H.: Complex Analytic Varieties. Addison-Wesley, Reading, Mass. 1972.

Vollständige Liste der verwendeten Literatur:

1. ABHYANKAR, S.S.: Concepts of Order and Rank on a Complex Space, and a Condition for Normality. Math. Ann. 141 (1960) 171 - 192.

2. ——— : Local Analytic Geometry. Academic Press, New York - London 1964

3. BEHNKE, H. und H. GRAUERT: Analysis in Non-Compact Complex Spaces, Seite 11 - 44 in: Analytic Functions. Princeton: University Press Princeton 1960

4. BEHNKE, H. und K. STEIN: Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten und RIEMANNscher Gebiete. Math. Ann. 124 (1951) 1 - 16

5. BEHNKE, H. und P. THULLEN: siehe [BT]

6. BOCHNER, S. und W.T. MARTIN: Several Complex Variables. Princeton: University Press Princeton 1948

7. CARTAN, H.: Sêminaire E.N.S. 1951/52. Benjamin, New York - Amsterdam 1967

8. ——— : Sêminaire E.N.S. 1953/54. Benjamin, New York - Amsterdam 1967

9. ——— : Variêtês analytiques complexes et cohomologie, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, tenu â Bruxelles, 1953. S. 41 - 55

10. ——— : siehe S. 149

11. ——— : Analytische Funktionen einer oder mehrerer komplexen Veränderlichen. BI-Hochschultaschenbücher Mannheim 112/112a), 1966

12. ECKSTEIN, F.: Algebra III, Vorlesung an der TU München im WS 1974/75

13. FISCHER, G.: siehe [FI]

14. FORSTER, O.: Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen. Ausarbeitung der Vorlesung im SS 1964 an der Universität München.

15. ——— : Einführung in die komplexe Analysis mehrerer Veränderlichen. Ausarbeitung der Vorlesung im SS 1973 an der Universität Regensburg. (Regensburger Trichter Band 4)

16. GRAUERT, H.: Charakterisierung der holomorph-vollständigen Räume. Math. Ann. 129 (1955) 233 - 259

17. ——— und K. FRITZSCHE: Einführung in die Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1974

18. ——— und R. REMMERT: siehe S. 169

19. ——— ———: Singularitäten komplexer Mannigfaltigkeiten und RIEMANNsche Gebiete. Math. Z. 67 (1957) 103 - 128

20. ——— ———: Komplexe Räume. Math. Ann. 136 (1958) 245 - 318

21. ——— ———: Analytische Stellenalgebren. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 176. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1971.

22. GRÖBNER, W.: Moderne algebraische Geometrie, Springer-Verlag, Wien und Innsbruck 1949

23. GUNNING, R.C.: siehe [GU]

24. ———: Lectures on Complex Analytic Varieties. Finite Analytic Mappings. Princeton University Press, Princeton, N.J. 1974

25. ——— und H. ROSSI: Analytic Functions of Several Complex Variables. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall 1965

26. HAUER, K.-H.: Komplexe Räume. Diplomarbeit München 1968

27. HAYES, S.: 4 Vorlesungen zur Funktionentheorie, gehalten an der TU München von WS 1975/76 bis SS 1977

28. HERRMANN, M., R. SCHMIDT und W. VOGEL: siehe S. 116

29. HERVÉ, M.: Several Complex Variables, Local Theory. Oxford University Press 1963

30. HIRONAKA, H.: siehe S. 116

31. HIRZEBRUCH, F.: siehe S. 116

32. ——— und G. SCHEJA: Garben- und Cohomologietheorie. Vorlesungsausarbeitung Münster 1957

33. HITOTUMATU, S.: Note on the holomorphy on an analytic subset. Journal of the Faculty of Science of the University of Tokyo, VII (1958) 605 - 613

34. HOLMANN, H.: Vorlesung über Faserbündel. Aschendorff Münster 1962

35. HÖRMANDER, L.: An Introduction to Complex Analysis in Several Variables. Princeton, N.J.: Van Nostrand 1966

36. HOUZEL, Chr.: Géométrie analytique locale I - IV. Séminaire H. CARTAN 1960/61. Benjamin, New York - Amsterdam 1967

37. KERNER, H.: siehe S. 169

38. ——— : siehe [KR]

39. ——— : siehe [KA]

40. KUHLMANN, N.: Zur Theorie der Modifikationen algebraischer Varietäten. Schriftenreihe Math. Inst. Universität Münster, Heft 14 (1959)

41. ——— : Projektive Modifikationen komplexer Räume. Math. Ann. 139 (1960) 217 - 238

42. ——— : siehe [KU1]

43. ——— : siehe [KU2]

44. ——— : siehe S. 116

45. KULTZE, R.: Garbentheorie. B.G. Teubner, Stuttgart 1970

46. LANG, S.: Introduction to Algebraic Geometry. Interscience Publishers, New York 1958

47. MARKOE, A.: siehe S. 73

48. MEIS, Th.: Die minimale Blätterzahl der Konkretisierungen einer kompakten RIEMANNschen Fläche. Schriftenreihe Math. Inst. Universität Münster, Heft 16, 1960

49. NARASIMHAN, R.: siehe [NA]

50. OKA, K.: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, VIII. Lemme fondamental. J. Math. Soc. Japan 3 (1951) 204 - 214 und 259 - 278

51. RAMSPOTT, K.J.: Garbentheorie. Ausarbeitung der Vorlesung im SS 1968 an der Universität München.

52. REMMERT, R.: Projektionen analytischer Mengen. Math. Ann. 130 (1956) 410 - 441

53. ——— : Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. Math. Ann. 133 (1957) 328 - 370

54. ——— und K. STEIN: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. 126 (1953) 263 - 306

55. ROTHSTEIN, W.: Einführung in die Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen, I. Aschendorff Münster 1965

56. ——— : Einführung in die Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen, II. Aschendorff Münster 1965

57. SAMUEL, P.: Algêbre locale, Mémorial des Sci. Math. Fasc. CXXIII, Paris 1953

58. SERRE, J.P.: Faisceaux algébrique cohérent. Ann. Math. 61 (1955) 197 - 278

59. ——— : Géométrie algébrique et géométrie analytique. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 6 (1955/56) 1 - 42

60. STEIN, K.: Einführung in die Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen. Ausarbeitung der Vorlesungen im SS 1961 und WS 1961/62 an der Universität München.

61. THIMM, W.: Über Moduln und Ideale von holomorphen Funktionen mehrerer Variablen. Math. Ann. 139 (1959) 1 - 13

62. ——— : Untersuchungen über das Spurproblem von holomorphen Funktionen auf analytischen Mengen. Math. Ann. 139 (1959) 95 - 114

63. ——— : Vorlesung über Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen. Aschendorff Münster 1961

64. ——— : Lückengarben von kohärenten analytischen Modulgarben. Math. Ann. 148 (1962) 372 - 394

65. VAN DER WAERDEN, B.L.: siehe [WAEI]

66. ——— : Algebra, Teil 2. 5. Auflage. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1967

67. WHITNEY, H.: siehe [WH]

68. WOLFFHARDT, K.: Lokale analytische Geometrie. Ausarbeitung der Vorlesung im WS 1972/73 an der Universität München.

69. ZARISKI, O.: Some Results in the Arithmetic Theory of Algebraic Varieties. Am. J. Math. Vol. LXI (1939) 249 - 294

70. ——— : Sur la normalité analytique des variétés normales. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 2 (1951) 161 - 164

71. ——— und P. SAMUEL: Commutative Algebra, Vol I. The University Series in Higher Math., Princeton, N.J. 1958

72. ——— ——— : Commutative Algebra, Vol. II. The University Series in Higher Math., Princeton, N.J. 1960

S T I C H W O R T V E R Z E I C H N I S